

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
no. 1
augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) - Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 0165-0394

Bij het begin van de 59e jaargang

Het begin van de 59e jaargang geeft een aanleiding om stil te staan bij de handel en wandel van de redaktie in het afgelopen jaar en om wat van onze plannen voor het nieuwe jaar te ontvouwen.
De redaktie heeft Wim de Porto en Peter Sanders in de loop van het afgelopen jaar uit haar midden zien verdwijnen. Daarnaast is Bert Zwaneveld als hoofdredakteur opgevolgd door Frans Dolmans. We danken de vertrokken redaktieleden voor hun jarenlange bijdragen aan ons blad. Nieuw in de redaktie is Ine van Breugel. De redaktie verwacht zich de komende maanden met nog enige leden te kunnen uitbreiden.
De plannen, die we een jaar geleden ontvouwden aan het begin van de 58e jaargang zijn op één na alle gerealiseerd. Er is geen special over 'Toetsen en wiskundeonderwijs' verschenen. Daar wordt thans nog aan gewerkt met het oog op publicatie in 1983-84.
Euclides wil een platform zijn waar allerlei meningen over wiskundeonderwijs uitgewisseld kunnen worden, en wil tevens een voortrekkersfunctie innemen bij het zoeken naar nieuwe wegen en bij het stimuleren van ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs.
Het blad kent al jaren de luxe van een continu aanbod van kopy. We willen bij het publiceren daarvan meer aandacht aan actualiteiten besteden en daarbij bewuster gebruik maken van het maandelijks verschijnen van het blad en van de grootte van de oplage (bijna 4000 abonnees). Mededelingen kunnen in principe binnen een maand gepubliceerd worden.
Traditiegetrouw kunt u een special over eindexamens verwachten.

In een aantal artikelen zullen we aandacht besteden aan de gevolgen, die de komst van informatie-technologie en burgerinformatica voor het wiskundeonderwijs kunnen hebben. Enerzijds willen we hierbij informatie bieden bij snel veranderende ontwikkelingen, anderzijds willen we kritische geluiden laten horen bij de informatie-gekte, die op het wiskundeonderwijs lijkt af te komen.
Met enige auteurs zijn verder afspraken gemaakt over enige vervolgseries over aspecten van wiskundeonderwijs, die u in opeenvolgende nummers in de jaargang 83-84 kunt verwachten. Met name komen hierbij klasse-ervaringen en voor de dagelijkse onderwijspraktijk relevante inzichten ter sprake.
In de rubriek 'Kalender' zullen we data van activiteiten rond didaktiek van de wiskunde, die aan ons doorgegeven zijn, opnemen.

Het bestuur van de vereniging van wiskundeleraren heeft de redaktie toegezegd een duidelijke financiële prioriteit te willen stellen aan het handhaven van de omvang en de kwaliteit van het blad. Wij zijn erkentelijk voor deze steun.
Met de uitgever Wolters-Noordhoff zijn besprekingen gestart die in 84-85 (bij de 60e jaargang) kunnen leiden tot een nieuwe vormgeving van Euclides.
Ook bij de uitgever heeft een wisseling van de wacht plaats gevonden. We danken projectleidster Willy Broekema voor haar soepele en accurate medewerking en hopen ook met haar opvolger, Roel Mulder, op dezelfde wijze te kunnen samenwerken.
We danken de uitgever en het bestuur van de vereniging voor de plezierige samenwerking in het afgelopen jaar.
De redaktie wil geïnteresseerden stimuleren een bijdrage aan het blad te leveren. Voor (toekomstige) auteurs is er een informatieblad 'Tips voor auteurs van Euclides' verkrijgbaar bij de hoofdredakteur.

We wensen u veel leesplezier toe met de geplande 400 bladzijden EUCLIDES.

Namens de redaktie,
Frans Dolmans, hoofdredakteur.

Aandachtspunten

FRED GOFFREE

Proefschrift

Op woensdagmiddag 8 december 1982 promoveerde Joop van Dormolen tot doctor in de Wiskunde en Natuurwetenschappen aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Het proefschrift, dat hij onder begeleiding van zijn promotors Mossel en Van der Blij tot stand bracht is een bijdrage aan de didactiek van het wiskundeonderwijs. De ondertitel: 'De a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs' laat er wat dat betreft geen twijfel over bestaan. Leerboeken spelen een belangrijke rol in het voortgezet onderwijs, wiskundeleraren analyseren, beoordelen, gebruiken en verbeteren beschikbare leerteksten (= stukje uit het boek) op een eigen wijze, naar een persoonlijk gekleurde stijl van onderwijzen en op basis van een bepaalde opvatting over wiskunde, over het leren en over het onderwijzen daarvan. Door het subjectieve karakter van dergelijke analyses (vooràf) blijven de gebruikte criteria vaak impliciet en zijn de gevelde oordelen soms niet bespreekbaar (met collega's bijvoorbeeld). In feite vormde een dergelijke collegiale discussie één van de aanleidingen voor de auteur om zich diepgaand met de materie te gaan bezighouden. Vanzelfsprekend moesten vele beperkingen opgelegd worden. Twee zijn al duidelijk in de (ondertitel) opgenomen:
'*a priori*' wil zeggen, dat het analyseren studeerkamerwerk blijft. De leerling komt niet zelf aan het woord, over zijn rol in het geheel kan men slechts speculeren,
'*leerteksten*' wil zeggen, dat het niet gaat over gehele wiskundemethoden of langlopende leerprocessen, maar over kleine onderdelen daarvan.

Geen léésboek, maar dóe-boek

Toch blijft er, zo laat dit proefschrift zien, onverwacht veel over om de aandacht op te vestigen met het doel korte leerteksten in het perspectief van gewenst wiskundeonderwijs te doordenken. Naar mijn mening is dit meer dan in de taakstelling (pagina 12) tot uitdrukking wordt gebracht:
'Ontwerp een methode voor het a priori analyseren van leerteksten, en beschrijf die methode zodanig, dat auteurs, lerarenopleiders, leraren en aanstaande leraren door het analyseren geholpen worden bij het expliciteren van hun eigen uitgangspunten en doelstellingen'.

Het resultaat van jarenlange arbeid aan deze taak is neergelegd in een lijst van 'aandachtspunten', die het mogelijk maken een te analyseren leertekst steeds vanuit een bepaalde gezichtshoek te bekijken. Van Dormolen gaat er daarbij vanuit dat degene, die analyseert, dit professioneel doet. Dit betekent ondermeer dat hij de leerlingen kent, dat hij van leerprocessen weet, dat hij een goede (meta)kennis heeft van wiskunde, dat hij een opvatting heeft over wat goed wiskundeonderwijs is en dat hij zichzelf als wiskundeleraar kent. Ik vermoed dat het werken met de aandachtspunten van Van Dormolen, de discussie en de persoonlijke reflectie daarover, ook kunnen bijdragen aan het vergroten van genoemde professionaliteit. Daarmee is tevens aangegeven dat het onderhavige proefschrift niet zomaar een léésboek is, maar een dóe-boek. De vele citaten uit leerboeken, die Van Dormolen heeft opgenomen, zijn dan ook op te vatten als even zovele opdrachten aan de lezer.
Voordat nu dit dóe-karakter in deze beschouwing tot uitdrukking wordt gebracht, wil ik eerst de volgende vraag voor leraren-gebruikers aan de orde stellen:
'Waarom zou je als leraar leerteksten zo minitieus onder de loep nemen, voordat je er in de klas mee aan de slag gaat?'
Gaat men ervan uit dat auteurs professionals zijn, op het gebied van wiskundeonderwijs en leerboeken, wat valt er dan nog te analyseren? Van Dormolen noemt voor dat geval drie interessante dilemma's waarmee schrijvers op meer dan een moment geconfronteerd moeten zijn geweest. Hoeveel didactisch water heeft men in de vakwetenschappelijke wijn moeten doen? (het vakwetenschappelijke dilemma). Is ergens het evenwicht tussen de hoeveelheid verstrekte informatie en de verwerkingsmogelijkheden van de leerling verstoord? (het overladingsdilemma). Krijgt de leerling binnen een tekst voldoende gelegenheid om op eigen denkkracht zijn (leer) weg te zoeken of wordt hij, doordat de auteurs de leerlingen niet persoonlijk kennen, voor alle zekerheid teveel gestuurd (het afstandsdilemma). Het lijkt me toe dat leraren met veel plezier in nieuw uitgekomen leerboeken op zoek kunnen gaan naar de keuzen, die op verschillende momenten met betrekking tot deze dilemma's zijn gedaan.

Constructieve analyse

Veel minder vrijblijvend echter zal de leraar zich opstellen, als hij een leertekst analyseert, die hij de volgende dag in zijn klas aan de orde wil stellen. Ik zou in dit geval willen spreken van een constructieve analyse: je hebt (nu eenmaal) het gegeven boek, je kent de leerlingen en je wilt zo goed mogelijk wiskundeonderwijs geven. In dat geval wijzig je de tekst of vul je hem aan, bedenkt je eigen bijdrage naast de tekst en ziet daarbij in gedachten hoe de leerlingen op tekst en aanvulling reageren. Van Dormolen die de constructieve analyse niet speciaal in de aandacht plaatst, laat op het eind van zijn boek wel enige 'analyseerders' aan het woord. Hierbij wordt een aantal collega's rechtstreeks aangesproken op hun deskundigheid. Wil je analyseren op basis van mijn methode, was de vraag. En niet: geef je mening over mijn methode, zoals in veel onderwijskundig onderzoek gebruikelijk is.
Desondanks acht ik dit empirische slot het zwakste deel van dit boek. De

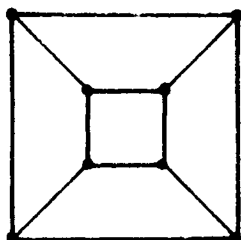
oorzaak meen ik te kunnen vinden in het ontbreken van een 'constructieve-analyse-context', waardoor de collega's slechts extrinsiek gemotiveerd konden worden.

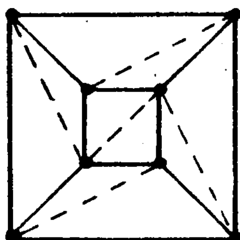
Kernen ↔ Probleemsituaties

Dit doet evenwel weinig af aan de waarde van voorafgaande hoofdstukken. Essentieel is, naar mijn mening, de onderscheiding tussen '*Wiskundige Kernen*', '*Probleemsituaties*', en de *Relaties* ertussen. In het volgende stukje leertekst wil ik proberen vanuit die onderscheiding enige van de aandachtspunten te duiden. Voor alle duidelijkheid merk ik op dat in de volgende tekst niet een echte klassesituatie beschreven wordt.
'Leraar: de vorige les zijn we tot het vermoeden gekomen dat: 'voor alle veelvlakken geldt $H - R + Z = 2$; hierbij staat H voor het aantal hoekpunten, R voor het aantal ribben en Z voor het aantal zijvlakken'. We hebben dit vermoeden op diverse manieren tevergeefs trachten te weerleggen. Maar bewezen is er nog niets. Heeft iemand misschien een bewijs gevonden?
Leerling Sigma: Ik moet tot mijn spijt bekennen dat ik er niet in geslaagd ben om een streng bewijs van deze stelling te vinden ... Maar als nu de geldigheid ervan op zoveel manieren is aangetoond, dan kan er toch geen twijfel aan bestaan dat het gestelde voor alle veelvlakken waar is. Voor mij is de stelling in voldoende mate aangetoond. Maar als u een bewijs hebt, houd ik me sterk aanbevolen.
Leraar: Inderdaad heb ik er een. Het bestaat uit het volgende gedachtenexperiment.

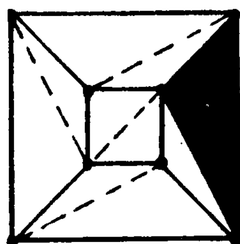
Stap 1:
Stel je voor dat het veelvlak hol is, en bestaat uit een dun rubber vlies. Als je er dan een zijvlak uitknipt, kun je het overblijvende deel in zijn geheel zo uitrekken, dat het zonder te beschadigen op het bord kan worden opgespannen. De zijvlakken en ribben zullen wel vervormd worden, de ribben worden wellicht krommen, maar H en R blijven ongewijzigd en dus wordt $H - R + Z = 2$ voor het oorspronkelijke veelvlak in het geval van het opgespannen vlies $H - R + Z = 1$ (er is immers één zijvlak minder).

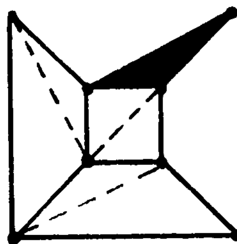
Stap 2:
Nu maken we allemaal driehoeken op het opgespannen veelvlak. Hiertoe tekenen we (wellicht kromme) diagonalen in die (misschien kromlijnige) veelhoeken, die zelf geen (mogelijk kromlijnige) driehoeken zijn. Bij het tekenen van een diagonaal worden zowel R als Z één meer, zodat het totaal van $H - R + Z$ niet verandert. Zie bijvoorbeeld dit geval voor een kubus:


Fig. 1


Fig. 2

Stap 3:
Nu verwijderen we één voor één de driehoeken. Hierbij heb je twee mogelijkheden, òf we nemen een ribbe weg (fig. 3a) òf we nemen twee ribben en één hoekpunt weg (fig. 3b).


Fig. 3a


Fig. 3b

In beide gevallen verandert de betrekking $H - R + Z = 1$ niet, als er een driehoek wordt weggenomen. Uiteindelijk houden we een enkele driehoek over, en daarvoor geldt $H - R + Z = 1$. Hiermee hebben we onze bewering bewezen.
Leerling Delta: Nu kunnen we het een *stelling* noemen. Er is niets 'vermoedelijks' meer aan.
Leerling Alpha: Ik heb twijfels. Ik zie in dat dit gedachtenexperiment opgaat voor een kubus of voor een viervlak, maar hoe weet ik dat het voor elk veelvlak geldt? Bijvoorbeeld, bent u er zeker van, dat elk veelvlak *op het bord kan worden gespannen als er een zijvlak uitgeknipt is*? Ik ben niet zeker van uw eerste stap.
Leerling Bêta: En bij het maken van de driehoeken, bent u er dan zeker van dat *bij elke nieuwe ribbe er ook een nieuw zijvlak ontstaat*? Ik twijfel aan uw tweede stap.
Leerling Gamma: Bent u er zeker van dat *er slechts twee alternatieven zijn – het verdwijnen van een ribbe of anders van twee ribben en een hoekpunt – als men een voor een driehoeken wegneemt? En bent u er wel zeker van dat er precies een driehoek op het eind overblijft?* Ik twijfel aan uw derde stap.
Leraar: Natuurlijk ben ik niet zeker...'

Tot zover (mijn vertaling van) een stukje leertekst uit het voortreffelijke boek 'Proofs and Refutations' van Lakatos (1976, pag. 7, 8). Het is voortreffelijk zowel naar inhoud als naar didactische vormgeving. U begrijpt, dat is o.a. mijn mening. Met de aandachtspunten van Van Dormolen is het nu mogelijk om die mening tenminste nader te specificeren.
De leraar noemt in zijn inleiding een wiskundige *kern*, uitgedrukt in de relatie $H - R + Z = 2$. Deze kern blijkt in de vorige les(sen) ontwikkeld te zijn vanuit een hierboven niet genoemde *probleemsituatie*. In het boek wordt die wel vermeld. Men is uitgegaan van veelhoeken, die eenduidig benoemd kunnen worden met het aantal hoekpunten: een zeshoek, een driehoek enz. Hier geldt namelijk $H = R$. Het probleem was toen: hoe zit dat eigenlijk met veelvlakken? Al onderzoekend (o.a. aan regelmatige veelvlakken) is men toen ertoe gekomen het bovenstaand vermoeden op te stellen. De tweede wiskundige kern betreft het gedachtenexperiment, dat door de leraar als bewijs wordt gepresenteerd. Via de reactie van o.a. leerling Alpha wordt deze stelling zelf weer tot probleemsituatie.

Dynamiek van de wiskunde

De beschrijving van Lakatos laat niet alleen zien dat in de relaties tussen P(robleemsituatie) en K(ernen) de wiskundige activiteit bedreven wordt, maar nodigt de lezer (leerling) ook uit hier zelf actief te worden. Dit laatste is essentieel, tenminste als men ervan uitgaat dat wiskunde activiteit is, en dat je wiskunde leert door het te *doen*. Van Dormolen beklemtoont op dit punt het dynamische karakter van de wiskunde (p. 30). Mijn waardering 'voortreffelijk' is met bovenstaande analyse in zekere zin onderbouwd. Bovendien blijkt dat ik, als analyseerder, mijn uitgangspunt (wiskunde is activiteit) heb moeten expliciteren.
Terug naar de eerste kern: $H - R + Z = 2$. Oppervlakkig gezien kan men hier een *theoretisch-structureel* aspect aan onderkennen. Maar er is meer. Deze kern wordt gepresenteerd als een vermoeden, dat in het voorgaande door de leerlingen zelf ontwikkeld is. Hiermee krijgt de kern een *methodisch* aspect: zo gaat men in de wiskunde (soms, vaak) te werk. En voordat dit vermoeden tot 'theorie' wordt, moet er nog heel wat denkwerk verricht worden. Er moet iets bewezen worden. Ook dus in de relatie tussen beide aspecten wordt wiskunde bedreven. Men kan $H - R + Z = 2$ tevens een *algoritmisch* aspect toekennen. Neem bijvoorbeeld een regelmatig twaalfvlak, en bereken H en R. Instrumenteel begrijpen van de relatie blijkt dan onvoldoende. Relationeel inzicht, opgedaan in de eerste onderzoekingen, zal moeten worden ingezet.
Van Dormolen noemt in zijn studie nog twee aspecten, het *communicatieve* en het *logische*. Over het eerste behoeft hier weinig gezegd te worden. Lakatos' didactische vormgeving is in feite een en al communicatie. Voor toekomstige auteurs van schoolboeken is dit wellicht een aanwijzing om dit soort discussies, waar de lezer geacht wordt te gaan participeren, op te nemen. Zie bijvoorbeeld: Stefan Turnau: The mathematical textbook for young students, in Educational Studies in Mathematics 11 (1980). Dergelijke leerteksten, in de vorm van discussies waaraan de lezer wordt geacht deel te nemen, komt men niet vaak tegen. Ik herinner me in dit kader D. Van Dalen's 'Een leerzame, doch aangename reis' in de 51e jrg. van dit tijdschrift en de gesprekken van D. Oort met 'Basje' in het Wiskobas Bulletin. Kort geleden, na het verschijnen van Van Dormolen's dissertatie, schreef Jan E. Nordgreen uit Noorwegen weer iets in deze trant: 'A Plausible Dialogue' (Mathematics Teaching, m 102, maart 1983). Nu terug naar de leertekst van Lakatos.
Wat betreft het logische aspect komen we in de reacties van de leerlingen Delta, Alpha, Bêta en Gamma goed aan onze trekken. Ze vormen het begin van een onderzoek naar tegenvoorbeelden, die de kracht hebben òf het mooie gedachten-experiment òf het vermoeden helemaal te weerleggen. Wie wil zien hoe dat gebeurt, moet zèlf verder lezen in Lakatos.

Correctheid

Op basis van bovenstaande analyse mogen we volgens Van Dormolen stellen, dat hier sprake is van *echte* wiskunde. Alle fundamentele aspecten zijn namelijk in dit korte citaat aan de orde geweest. Achteraf beschouwd is dit niet zo verwonderlijk. Lakatos heeft namelijk in zijn tekst de historische gang van zaken

op de voet gevolgd. In de (hier niet) vermelde voetnoten laat hij dit prachtig zien. Van Dormolen besteedt een heel hoofdstuk aan de karakterisering van wat nu *echte* wiskunde is. Het is naar mijn mening het meest waardevolle hoofdstuk geworden en zal voor vele lezers nieuwe perspectieven openen. Echtheid vat hij op als onderdeel van Correctheid. Een leertekst is correct als er *geen foutjes* inzitten, als hij *consistent* (vrij van tegenspraken) is, als er echte wiskunde in naar voren komt èn als hij *duidelijk* is voor de lezer. Met het aandachtspunt duidelijkheid komt voor het eerst de leerling (lezer) in beeld.
Is Lakatos' leertekst duidelijk? Ik ben bang dat we ons nu op glad ijs wagen. Volgens Van Dormolen is een tekst duidelijk als de door de auteur bedoelde context overeenstemt met het bij de leerling geactualiseerde cognitieve schema. Anders gezegd, als de auteur met zijn tekst en de leerling met zijn gedachten op dezelfde golflengte zitten. Op welke golflengte zat u als lezer van Lakatos' leertekst? Paste dat bij de bedoelingen, (ongetwijfeld methodische), die hij had? Wie zijn leerlingen goed kent, kan op dit punt speculeren. Ik moet hier met mijn voorbeeld afhaken. Van een constructieve analyse komt verder niets, omdat ik mijn lezers (leerlingen) niet ken.

Aandacht voor de leerling (lezer)

Of een leerling de tekst begrijpt, hangt natuurlijk ook af van wat hij al geleerd (en begrepen) heeft. Van Dormolen behandelt in verband met de hier bedoelde 'Voorbereiding van de leerling' twee aandachtspunten:
cursorische voorbereiding op en door de tekst en
begripsmatige voorbereiding op en door de tekst.
Niet alles trouwens, wat eerder geleerd is, ondersteunt het nieuwe leerproces. Soms kunnen er flinke storingen (bijvoorbeeld fixering) optreden. Iedere wiskundeleraar kent waarschijnlijk de moeilijkheden, die naar voren komen als de goniometrische functies worden ingevoerd. De kennis van $\cos\alpha$ als verhouding (van 'lijnstukken') helpt op z'n zachtst gezegd niet erg bij het mentaal construeren van de cosinusfunctie. Een ander bekend verschijnsel wordt eveneens in dit hoofdstuk naar voren gebracht. Het gaat om variabelen, die voor leerlingen in de wiskundeles, naar blijkt, een andere begripsmatige inhoud hebben dan in de natuurkundeles. Van Dormolen zegt hierover: 'In gesprekken wordt systeemscheiding bij de wiskunde- en natuurkundelessen gewoonlijk toegeschreven aan het dogmatisch gebruik van x en y voor de variabelen bij de wiskunde, terwijl in de natuurkunde ook letters als s, t, F, m in gebruik zijn. Het is niet onmogelijk dat hier niet de kern van het probleem ligt, maar dat het verzwijgen van de dimensie de feitelijke oorzaak is'. (pag. 125).

Met deze twee voorbeelen is niet dit hoofdstuk gekarakteriseerd. Er worden meer leerteksten geciteerd en er wordt verband gelegd met leerpsychologische theorie (Van Parreren, Van Hiele, Van 't Riet). Wat mij betreft zijn de 'citaten' overtuigender dan de 'verbanden'.

Aangepastheid aan de leerling

In het volgende hoofdstuk wordt expliciet de nadruk gelegd op de relatie tussen de tekst en de leerling (pag. 137). Vanzelfsprekend moet er dan nagedacht worden over het verloop van (wiskundige) leerprocessen. Wie Van Dormolen's andere publikaties kent, zal begrijpen dat ook in deze studie de '*opbouw van het leerproces*' beschreven wordt in termen van oriënteren, ontwikkelen en verwerken. Hiermee wordt een grove structurering aangegeven, die in een indrukwekkend schema (pag. 139) nader gedetailleerd wordt. Interessant is dat Van Dormolen 'zijn' opbouw wat relativeert: 'een belangrijke toevoeging is dat het schema een strategie beschrijft, die niet altijd op bovenstaande manier behoeft plaats te vinden' (pag. 140). Er is niet één manier van leren, je kunt niet spreken van 'het' leerproces, de wiskundeleraar zal met verschillende kernen, probleemsituaties en relaties ook verschillende leerprocessen initiëren. Van Dormolen gaat hierop niet veel verder in, evenmin op de stille kracht achter leerprocessen, de motivatie. Wel komt de motivatie ter sprake, namelijk in de zeer lezenswaardige passage over conceptuele conflicten in leerteksten (pag. 146). Ter illustratie van dit begrip kan ik nog even verwijzen naar leerling Delta, die het gedachtenexperiment van zijn leraar volledig als bewijs had aanvaard. Toen kwam Alpha met zijn kritiek: conflict voor de lezer!

Niveau's in de taal

Dat ook het taalgebruik aangepast moet zijn aan de leerling, is niets nieuws. Van Dormolen beperkt zich evenwel niet tot triviale zaken in dit verband als vocabulaire (moeilijke woorden), syntax (moeilijke taalconstructies) e.d. Interessant is zijn analyse van taalniveau's, waarbij hij gebruik maakt van door Freudenthal genoemde kenmerken: feitvaststellende taal (zoals in ouderwetse definities gebruikelijk) naast actietaal (met een construerend element) en demonstratief, naast relatief naast functioneel taalgebruik.
Makers van leerteksten krijgen in deze paragraaf een aantal bruikbare en behartenswaardige aanwijzingen. In het bijzonder de opmerkingen over het nut van actietaal en de noodzaak van feitvaststellende taal (voor het leren van wiskunde) wil ik graag in de aandacht aanbevelen.

Tekens

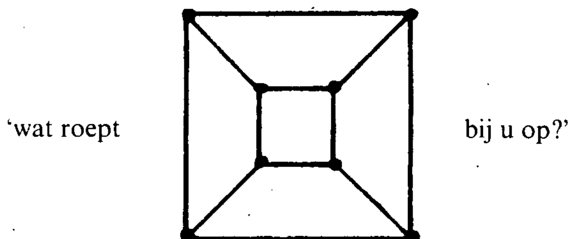
Taal en denken zijn onlosmakelijk verbonden, zo zegt mén vaak. Met het denken over niveau's in de taal kwam Van Dormolen dan ook logischerwijs terecht bij de denkniveau's van Van Hiele, en diens opmerkingen over symbool- en signaalwerking van tekens (pag. 161). Symboolwerking en signaalwerking zijn complementair, voegt Van Dormolen eraan toe in navolging van Otte, en hij legt verband met de eerdergenoemde aspecten van wiskunde:
'De tekens en tekencombinaties hebben een communicatief doel. Is het doel het vastleggen c.q. oproepen van theoretisch-structurele of logische aspecten, dan kan men van symboolbetekenis spreken. Bij het vastleggen van methodische of

algoritmische aspecten wordt vooral nadruk gelegd op de signaalbetekenis' (pag. 162).

Minstens zo belangrijk is het verband dat gelegd wordt met, wat Van Dormolen noemt, drie aspecten van een begrip: het constructieve, het existentiële en het operationele (pag. 159). Het laatsgenoemde betreft hóe een begrip gebruikt wordt, en correspondeert dus met het signaal karakter van het bijbehorende teken. Het voorlaatste correspondeert met het symboolkarakter, probeert u het maar eens met de volgende tekens: $H - R + Z$.

De laatste opdracht had ook kunnen luiden:

'wat roept



bij u op?'

Dacht u direct aan een kubus? Of aan $H - R + Z = 2$? Of aan het (voorlopige) bewijs daarvan? Plaatjes (illustraties) kun je tenslotte ook opvatten als tekens. In de wiskundeles (en in leerteksten) kun je om allerlei redenen niet altijd om een plaatje heen. Wat is de betekenis van plaatjes, behoren ze tot de didactiek of tot de wiskunde? Van Dormolen tracht hierop een antwoord te vinden. Een van zijn conclusies luidt: visuele tekens (plaatjes o.a.) bevorderen intuïtief denken; verbaal-algebraïsche tekens (letters, formules) bevorderen logisch deductief denken. Maar, dat is ook duidelijk, een plaatje kan het logisch-deductief denken goede ondersteuning bieden (pag. 170). Wat ik in deze paragraaf, die overigens goede aanleidingen ter overweging geeft aan potentiële auteurs van schoolboeken mis, is speciale aandacht voor de getallenlijn. Dit plaatje, met symbool- en signaalkarakter, speelt tenslotte een betekenisvolle rol van kleuterschool tot universiteit.

Leren omgaan met tekst

Omgaan met tekst is het laatste genoemde aandachtspunt. De vraag is nu of je in de tekst aanwijzingen kunt vinden om met die tekst om te gaan. Als u nog even terugdenkt aan het stukje over Lakatos, dan vindt u daar waarschijnlijk niets van deze aard. Van de lezer wordt verwacht dat hij weet om te gaan (= actief participeert) met de tekst. Kinderen moeten dat leren. Mijns inziens is dit een van de grote problemen van brugklassers, hoofdzakelijk buiten het vak wiskunde. Wat moet je doen met zo'n bladzijde vol letters, woorden, zinnen? Wat moet je doen als je iets niet begrijpt? Moet je alle zinnen uit het hoofd leren? Moet je het alleen maar lezen? Wat zou je kunnen noteren op een ander blaadje? Zou het gebruik van een gele viltstift geoorloofd zijn? (Ik denk van niet!) Wiskundige leerteksten, zo meent Van Dormolen, kunnen zo geschreven worden, dat de

leerling actief wiskunde gaat bedrijven. Of leraren dat zo leuk vinden, is de vraag. Wat zou er voor hen dan nog overblijven te doen? Bovendien zouden ze zich in hun didactische vrijheid beknot kunnen gevoelen (pag. 189).
Auteurs van schoolboeken, die het duidelijk voor ogen staat hoe de wiskundige leerprocessen zouden moeten verlopen, die de leerlingen goed menen te kennen, die zelf voortreffelijke leraren zijn, ondervinden op dit punt grote moeilijkheden. Een terughoudende opstelling (weinig sturing bijvoorbeeld) is gewenst, maar vraagt om grote zelfbeheersing bij het weglaten van veel beschikbare didactische know-how. Verliest men in deze zijn zelfbeheersing, dan zullen vele leraren een ander boek verkiezen. Een dilemma dus, hier eerder genoemd het afstandsdilemma, maar nu vanuit een andere invalshoek bekeken.

Wat aan de aandacht ontsnapt is

Met het bovenstaande heb ik getracht een globale indruk te geven van de studie van Van Dormolen. Deze indruk kan niet anders dan onvolledig zijn, ondanks de vele woorden die ik eraan besteed heb. Natuurlijk kun je een werk van jaren, neergelegd in een boek van 255 pagina's, niet even kort samenvatten. Hopelijk is de onvolledige indruk voldoende om de lezer te motiveren het oorspronkelijke werk ter hand te nemen.
Het bovenstaande verslag is vrij kritiekloos, slechts op een enkel punt kon ik een waardeoordeel niet voor mij houden. Omdat ik nog wel wat kritische kanttekeningen wil maken, en omdat ik weet dat tenminste één lezer dit van mij verwacht, besluit ik met enkele punten, die mijns inziens aan de aandacht van Van Dormolen ontsnapt zijn.

Zetfouten zijn bijna niet te vermijden. Auteurs en lezers moeten er blijkbaar mee leren leven. Soms geeft één verkeerde letter een totaal andere betekenis aan een stukje tekst. Geprezen de recensent die zoiets vindt. Op pagina 186 las ik niet over 'de opzichtige manier waarop de moeilijkheidsgraad telkens wat werd verhoogd' heen. De context was duidelijk genoeg, het moet 'o*m*zichtig' zijn.

Minder aan de aandacht ontsnapt, eerder weloverwogen gekozen, zijn de sterretjes: * Ze worden o.a. gebruikt om begin en eind van een citaat aan te geven. Dat er, ook buiten de lange erratalijst enkele vergeten zijn, wil ik hier niet bespreken. Het is meer het feit, dat de asterix (sterretje) als teken in dit opzicht niet werkt. Ik schreef eerder dat dit proefschrift een dóe-boek zou moeten zijn. Elk citaat zou een opdracht moeten inhouden voor de lezer, om didactisch actief te worden. Het aloude symbool om citaten aan te geven '. . . ' zou in dit boek dus zelfs een signaalfunctie moeten verwerven. De sterretjes, ook al voor andere zaken gebruikt, slagen daar mijns inziens niet in.

Misschien is het u nog niet opgevallen, maar de hoofdstukken en paragrafen in Van Dormolen's dissertatie zijn niet genummerd. In stelling 17 (wel genummerd dus) zegt hij daar iets over:
'Het gebruiken van getalcodes voor hoofdstukken en delen daarvan in boeken, artikelen en discussienota's suggereert, meestal ten onrechte, dat de inhoud

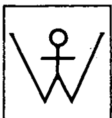
volledig is en hiërarchisch geordend'.
Het is de laatste stelling, die in de meeste gevallen een ludiek element bevat. Daar hij ernstig opgevat is door de promovendus, meen ik er een serieuze vraag aan te mogen koppelen: betekent het weglaten van dergelijke getalcodes dat het boek (artikel, nota) structuurloos is? Eerlijk gezegd heb ik bij het (één dimensionale) lezen van deze dissertatie af en toe moeilijkheden gehad om het geheel in het oog te houden en het overzicht te bewaren. Ik ben het eens met Van Dormolen dat dit door getalcodes alleen niet verholpen zou zijn geweest.

Een punt dat wel aan de aandacht ontsnapt is, betreft teksten voor kleine, heterogene groepen. In verband met de verschillende niveau's, aanpakken, tempo's, motivaties e.d. moeten dan speciale eisen worden gesteld. Van Dormolen geeft hiervoor, op verschillende plaatsen, bruikbare ideeën, zonder ze specifiek op deze situatie te enten. Dat is jammer.

Van geheel andere aard is mijn volgende kritische noot. In de studie worden op een aantal plaatsen 'meningen van anderen' weergegeven. Ik vind dat de kring van anderen te eng gekozen is. Belangrijke bijdragen op specifieke punten van o.a. Wagenschein (exemplarisch leren), Bruner (enactive, iconic en symbolic mode of thinking), Ausubel (advance organizers), Bishop (visualisation), J. K. Timmer (Lagere Wiskunde 2) en Wiskobas (het wiskunde practicum) hadden mijns inziens moeten worden verwerkt.

Tenslotte een *nieuw* aandachtspunt, dat wellicht nadere uitwerking verdient. Het betreft stukjes leertekst, waardoor de leerling als het ware op een metastandpunt wordt gebracht. Vanaf die plaats kijkt hij naar bijvoorbeeld hoe wiskunde toegepast wordt, hoe wiskunde door mensen geleerd wordt, hoe de wiskunde in de loop der tijden ontwikkeld is, hoe hij zelf zojuist iets wiskundigs verworven heeft e.d.* Nu word je van kijken alleen niet zo erg wijs, je moet ook wel eens ergens op gewezen worden. Bewustmaking, dat is dan nodig. In het citaat van Lakatos ziet men, vanaf dat standpunt, wat *echte* wiskunde *is* en hoe het ontwikkeld wordt in een dynamisch proces, waarbij probleemsituaties met wiskundige kernen verbonden worden. De tekst van Lakatos geeft inderdaad aanleiding om dit standpunt bewust in te nemen, namelijk door middel van de voetnoten. Die had ik u echter onthouden, net als zoveel uit deze dissertatie. Daarom beveel ik u aan het werk zelf ter hand te nemen en ik wens u toe dat u evenals ik zult genieten van de (impliciete en expliciete) wiskundige didactische krenten, die in het kader van 'aandachtspunten' door Joop van Dormolen worden aangeboden.
Ik wens Joop, mede namens de redactie van Euclides, van harte geluk met dit proefschrift en de daaraan verbonden promotie.

* De D-conferentie van het 'Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde' handelt over deze problematiek. De invalshoek is daar: zingeving van wiskunde in het onderwijs.



'Voor wiskunde moet je bij je vader wezen!'

FRANCIS MEESTER

Mijn moeder weet niets van wiskunde, dat beweert ze tenminste. Ze heeft eind jaren twintig de ULO gedaan en waarschijnlijk wel wat rekenen en wiskunde gekregen. Plezier in rekenen had ze nooit, ondanks haar ervaring in de sigarenwinkel van haar ouders. Ze vond het niet leuk in de winkel. Ze had apothekersassistente of bibliothecaresse willen worden. Dit vertelde ze ons dikwijls om ons te stimuleren een beroep te leren.

Wanneer haar kinderen goede prestaties haalden voor rekenen en later voor wiskunde, verwees ze altijd naar mijn vader 'die knobbel hebben jullie van hem. Ik heb nooit iets van wiskunde gehad of begrepen!' Inderdaad mijn vader kon er wat van. In onze herinnering was hij altijd bezig met de puzzels 'de Breinbrouwsels' uit de Katholieke Illustratie – een soort opgaven als de NRC iedere week heeft – en was hij enthousiast en trots als hij na uren puzzelen en waarschijnlijk een goede 'probleem-oplossende houding' tot een oplossing was gekomen. Hij leerde ons ook rekenen: optellen en aftrekken. Het onder elkaar zetten en vermenigvuldigen van twee getallen onder de duizend beheerste ik al, toen ik naar de eerste klas ging. Hij deed met ons spelletjes – letterspelletjes en strategieën om de onbekende letters te vinden; hij leerde ons canasta spelen toen we 5 jaar waren, later bridgen. Rekenen en wiskunde hebben we dus van pa geleerd, maar toch...
Achteraf denk ik – ook wanneer ik mijn drie zussen zie – dat we ontzettend veel van mijn moeder hebben geleerd, juist op het terrein van het 'probleemoplossen', maar dan op een praktisch gerichte manier.
Mijn moeder wist niets van wiskunde, maar nu – na zoveel jaren – begrijp ik hoeveel wiskundige methoden zij hanteerde om het hoofd boven water te kunnen houden. Om een huishouden met zes kinderen en een heel, heel krap budget te kunnen runnen pleeg je behoorlijk wat wiskundige aktiviteiten, al worden ze nooit als zodanig benoemd. Dat wil ik nu in het onderstaande proberen duidelijk te maken.
Behalve natuurlijk het rekenen en het zorgvuldig afwegen wat wel en niet mogelijk was, zaten er achter een heel aantal beslissingen een weloverdachte strategie. Wat zal ze 's nachts vaak wakker hebben gelegen om al die plannetjes te bedenken! Elk plan dat ze naar buiten bracht, was volledig uitgedacht; alle 'ja maar's...' waren ingebed in het plan en de eindkonklusie van mijn vader of van (één van) de kinderen was dan ook altijd 'doen!' Voor de betrokkene kon dat

soms een heel vervelende ervaring zijn. Voor eigen inbreng was geen of nauwelijks plaats. Een zelfde ervaring had ik later, toen ik met wiskundige eindprodukten werd gekonfronteerd. Het geheel klopte, je kon een redenering volgen, maar je eigen kreatieve denken was niet relevant.

Mijn moeder leerde ons o.a. de volgende wiskundeaktiviteiten:

- hoe je met weinig middelen toch een verantwoorde en smakelijke maaltijd op tafel kon zetten
- hoe je optimaal van de verschillende aanbiedingen van de winkels gebruik kon maken. Het was wat extra moeite, maar het leverde ook wat op. (optimaliseringsprocessen)
- strategieën bedenken hoe je zo voordelig mogelijk je schoolboeken en materialen kon verkrijgen
- hoe je kunt leren schilderen en behangen, ook al heb je het nog nooit gedaan (oppervlakte-translaties en vooral zelfvertrouwen)
- ze leerde ons HEMA-zooltjes op maat te snijden en onder onze schoenen te plakken (oppervlakte en spiegelen)
- patroon tekenen; uitraderen, patroon lezen en stof knippen. Vooral dit laatste is een verhaal apart. Haar uitgangspunt was, dat je altijd met een halve meter stof minder toe kunt dan volgens het patroon staat aangegeven. Dus eindeloos puzzelen. We legden patroondelen om en om, hielden rekening met de draadrichting van de stof, met de vouw, met het patroon. Soms moesten patroondelen op elkaar aansluiten en kozen we voor onzichtbare naadjes. Cirkelrokken werden in banen geknipt, maar dan wel zo dat het patroon redelijk goed doorliep. Het spannendst waren de streepstoffen: schuingestreepte bovenstukjes en vertikale lengtes. Met verbazing zagen we hoe het uitpakte, (bijna) altijd als bedoeld. (allerlei meetkundige aktiviteiten)
- de volgorde van een uitgeknipt patroon in elkaar stikken leerden we van haar. Sommige zaken kon je overslaan of in volgorde veranderen, andere moesten exakt in volgorde, bijv. met het beleg van een kraag of rever. (sommige bewerkingen zijn kommutatief, andere niet)
- rekenen kon ze ook! Ik hoef alleen aan de komplexe rekensommen te denken, die ze maakte om de hoeveelheid benodigde gordijnstof uit te rekenen-met inbegrip van plooien en het doorlopen van het patroon over de naden. Zij is voor mij nu een voorbeeld van iemand, die wel kan rekenen als het maar in een zinvolle kontekst gebeurt.
- een ander voorbeeld: zoek eens uit hoeveel zeil er voor een slaapkamer nodig is. Er is een aanbieding van zeil met een breedte van 200 cm! Eindeloos puzzelden wij (enkele dochters en moeder) hoe we zo voordelig mogelijk de vloer van de slaapkamer van de twee broertjes konden beleggen!
- ze liet ons zien hoe je in een rechte traploper de draai van de trap kon aanbrengen door er op de juiste plaats de plooien in te leggen. Toen na een aantal jaren de loper ging slijten presteerde ze het om de indertijd ingebrachte plooien eruit te halen en de kale stukken loper in de plooien te verwerken.
- breien was bij haar duidelijk van een andere rangorde dan naaien. De vrijheid die ze bij het naaien durfde te nemen nam ze beslist niet bij een breipatroon. Met het lezen van een breipatroon was ze heel secuur. Ze wist als je dit slordig

deed je ongelooflijke missers kon maken. Brei- en haakpatronen kunnen soms ingewikkeld te lezen zijn, voor de geoefende lezers is het geen enkel probleem. Maar in het breien groeiden al spoedig de dochters moeder boven het hoofd. We hadden op de lagere school leren breien – babysokjes, babyjasjes – en leren haken – pannelappen! – en daarnaast hadden we best wat vertrouwen in ons rekenvermogen en onze praktische breivaardigheden. We begrepen al snel, dat je een breipatroon koos van een trui die je mooi vond, daarbij wol kocht, die je fraai vond zonder op de dikte te letten en daarmee ging je aan het werk. Via een proeflapje, aantal steken, aantal pennen, aantal centimeters was alles om te rekenen naar het gewenste patroon (evenredigheden). Later realiseerde ik me dat een breipatroon precies hetzelfde is als een komputerprogramma in bijv. basic. Er is een naamgeving, er worden afkortingen ingevoerd, procedures, een start, en herhaalprogramma, untill . . ., go to . . ., en een eind.

- techniek niets voor vrouwen? Mijn moeder beheerste de techniek van het onderhoud van haar naaimachine perfekt. Ze smeerde deze regelmatig, draaide aan de spanningsregelaar of aan het spoelhuis bij een andere dikte van de stof of draad. Een vraagje tussendoor: welke man kan de draad opspannen op een naaimachine? Techniek niets voor mannen?

Eén echte misser – een wiskundige misser – kan ik me van mijn moeder herinneren. Ze wilde een nieuw zeiltje leggen in het toilet op de bovenverdieping. Ja, je begrijpt het al. Ze maakte van kranten een keurig patroon van de toiletvloer – de pot knipte ze eruit – legde het patroon op de achterkant van het zeil – sneed het met een bot stanleymes uit en wilde het in het toilet leggen. Helaas, de uitsnijding van de toiletpot zat aan de linkerkant in plaats van de rechter. Hilariteit in het hele gezin, moeder incluis, en een beetje beschaamd maar vooral met spijt: 'zonde van het zeiltje'. Ze maakte van het verknipte zeiltje een vloerbedekking voor de keukenkastjes, het toilet boven deed nog minstens een jaar met de oude bedekking. We troostten dan elkaar maar 'zoiets kan gebeuren, dat gebeurt je eenmaal en daarna nooit weer'. Soms was ze feller, wanneer kinderen of man haar bleven plagen: 'Ja, als je nooit wat doet kun je ook geen fouten maken! Ik probeer het tenminste, ... mag er bij mij ook eens wat mislukken?' Dan troostten we haar weer en knikten: 'Dat had ons ook kunnen gebeuren!'
'Voor wiskunde moet je bij je vader wezen!', antwoordde ze al haast voordat we iets gevraagd hadden. Heb ik wiskunde geleerd van mijn vader, van mijn moeder? In ieder geval van beiden! Door mijn vader kreeg ik het zelfvertrouwen voor het vak rekenen al voordat ik de lagere school instapte. Waarschijnlijk ook al iets van een probleem-oplossende houding voor theoretische problemen en in ieder geval het besef dat je daar dikwijls een hele tijd mee bezig bent en dat je moet blijven proberen, maar ook zag ik van mijn vader de faalangst op praktisch terrein. Hij had echte faalangst voor nieuwe bezigheden. Hij ontweek ze, niet omdat hij op dat werk neerkeek of om zich te drukken, want hij deed jarenlang allerlei vervelende huishoudelijke klussen om de taak van mijn moeder te verlichten. Wanneer hij zijn vrouw bezig zag met die praktische bezigheden, kon hij lachend, een beetje (beschaamd?) trots zeggen: 'Ik heb nu eenmaal twee linkerhanden' en met deze uitspraak al het praktische onbekende werk blijvend

vermijden. Datzelfde hoor ik jaren later nog regelmatig leerlingen –vooral meisjes– zeggen: 'Ik kan nu eenmaal geen wiskunde' en daarmee de stap om te beginnen nooit echt zetten.
Van mijn moeder kreeg ik de praktische instelling van het proberen en je niet uit het veld laten slaan. Op school had ik twee zusters als voorbeeld voor me en mede daardoor ook het zelfvertrouwen dat ik ook die wiskundeknobbel wel zou hebben. Wat knobbel! Mij moeder was reëel. Wanneer familieleden onze rapporten zagen en zeiden dat het toch maar fijn was als je zo goed kon leren, was mijn moeder de reële persoon en antwoordde: 'Ze werken er ook hard voor, ze zitten dikwijls boven te leren'. Zij bracht goede resultaten terug tot een kapaciteit, die je door je eigen bijdrage kunt ontwikkelen. Een nuchtere, praktische en gezonde kijk op leren, lijkt me.
Nu na jaren, realiseer ik me hoeveel wiskundige aktiviteiten wij thuis van onze moeder leerden. Ik besef dat nu pas, omdat ik er nu pas wiskunde in *herken*.
WISKUNDE IS NIET ALLEEN MAAR WISKUNDE ALS ER WISKUNDE OP STAAT!
Wiskunde behoor(t)(de) tot het domein van de mannen. Zij bepaalden wat wiskunde was en gaven de voorbeelden van toepassingen. Hun voorbeelden in de techniek, de natuurkunde, de voetbaltoto, de voetbalkompetitie, autowegen, zeilen en vliegen. Nu zijn we zover dat we wiskunde bedrijven zijn gaan zien als een menselijke aktiviteit, die herkenning heeft in de wereld om je heen en daar ook uit voorkomt. Dat overal wiskunde bedreven wordt –in en buiten het huishouden– door jongens en door meisjes– door vrouwen en door mannen.
Leerstofkeuze binnen de wiskunde wordt meestal gedaan aan de hand van een aantal kriteria. Eén hiervan is, dat de leerstof moet aansluiten bij de begintoestand van de leerlingen. Waarschijnlijk hebben we juist hiermee in het verleden nog al eens missers gemaakt bij jongens, maar vooral bij meisjes. Gezien de achterstand die meisjes hebben in het vak wiskunde –t.a.v. beeld van de wiskunde, motivatie voor later beroep, gebrek aan zelfvertrouwen, etc.– is het juist voor meisjes heel belangrijk binnen een herkenbare kontekst te kunnen leren.
Wiskundig denken is de kracht van het in- en uitzoomen, detaillistisch en globaal kunnen werken, konkreet en abstrakt, het proces van het mathematiseren; voor mij de wiskunde van mijn vader èn de wiskunde van mijn moeder.
Zelfvertrouwen op praktisch terrein en faalangst op abstrakt terrein kreeg ik van mijn moeder; zelfvertrouwen op abstrakt terrein en faalangst op praktisch gebied kreeg ik van mijn vader. Wat moest daaruit voortkomen? Een persoon met zekerheden en onzekerheden op praktisch en abstrakt terrein, maar vooral de verbazing dat zoveel jaren het beeld van de wiskunde voor mij de wiskunde van mijn vader was.
Gelukkig weet ik nu beter.

Het vlammend zwaard van de ACLO W

COR NAGTEGAAL

In Euclides van maart '83 staat een wat raar artikel. Eigenlijk is het geen artikel, maar een 'doorwrocht rapport' (zo is te lezen op blz. 248), of ja, eigenlijk is het ook geen rapport maar een 'advies van de ACLO-wiskunde i.o.' (noot op blz. 248).
Ik doel op het stuk 'Het Leerplan voor de Middenschool' van de hand van de Voorzitter Aclo Wiskunde, prof Freudenthal.
Daarin trekt de ACLO W 12 pagina's lang van lèer tegen het zogenaamde ELM (Experimenteel Leerplan Middenschool), en vooral tegen de medewerker wiskunde van de groep die verantwoordelijk is voor dat leerplan.
Het eigenlijke advies van de ACLO W aan de Bestuursraad van de SLO bestaat uit 13 'alinea's', waarvan er overigens slechts 2 een adviserend karakter hebben, de overige geven aan hoe
  verontrust,
  geschokt,
  verdrietig, ...
de ACLO Wiskunde wel is over het ELM.
Die 2 adviserende onderdelen komen neer op:
+ trek het ELM in
+ zorg ervoor dat de pg OLM zich nooit meer met leerplanontwikkeling wiskunde mag bemoeien.

De strekking van die 2 adviezen maakt dat het stuk een soort 'for your eyes only'-karakter krijgt: je krijgt het idee iets te lezen dat eigenlijk bestemd is voor anderen, een intern rapport dat nooit bedoeld was om naar buiten te komen, de 'Freudenthal-papers'.
Weliswaar is het stuk een jaar oud, en is de projectgroep die het ELM gemaakt heeft al opgeheven, dat neemt niet weg dat ik met rode oortjes van nieuwsgierigheid begon te lezen hoe bont die medewerker wiskunde aan het ELM het wel gemaakt heeft dat hij nu door de ACLO W in eigen persoon het leerplanontwikkelings-paradijs wordt uitgezet. Tussen alle afkortingen en uitlatingen van emotionele aard zijn er ook inhoudelijk belangrijke passages te vinden. In twee ervan lijkt het feitelijke conflict tussen de ACLO W en de schrijvers van het ELM besloten te liggen:
- de vermeende onderwijs*politieke* formulering van wat thematisch onderwijs is.
- de veronderstelde 'verpaupering' van het wiskunde-onderwijs, die daar een gevolg van zou zijn.

Op de markt

'Thematisch', dat is het nieuwe toverwoord in de publicaties over onderwijs, het sesam-open-u van nieuwe leergebieden en oude vakken. Het is dus zaak dat je je visie op onderwijs kunt weergeven in termen van 'thematisch' en 'niet-thematisch': dat lijkt in ieder geval de verplichte vocabulaire te zijn. Maar, zoals dat gaat, visies op onderwijs zijn niet zo flexibel als de woordkeus, dus er wordt heel wat verschillende koopwaar onder dezelfde wondernaam aangeboden. Zo waan je je opeens op de marktplaats, midden tussen de standwerkers, die elkaar de klanten proberen af te vangen.
Bij de kraam van de ACLO W kun je horen: 'Koop bij ons, wij leveren de thema's UIT VOORRAAD, thema's die steeds meer veld winnen tot ver in het buitenland toe!' (resp. pp. 253, 256, 253).
Bij de kraam van de Middenschool wijzen ze je op de maatschappelijke relevantie van hun thema's en 'Koop onze thema's want die zijn niet vakgebonden en geven meer zicht en mogelijk greep op een stukje van de omringende wereld en je eigen plaats daarin!' (VA 28, Middenschool in Beeld).
En dan komt er uit de kraam van de ACLO W natuurlijk weer overheen: 'Maar wat ze daar een thema noemen dat is helemaal geen thema, tenminste niet in gangbare algemene zin, dat is een thema in beperkte zin, en dat is gevaarlijk want dat werkt verpaupering in de hand!!' (resp. pp. 253, 256).
Enzovoort.

Het is misschien wel grappig om je zo'n markt voor te stellen, maar echt leuk is het natuurlijk niet om te moeten zien hoe mensen die ongetwijfeld het beste denken voor te hebben met het onderwijs – wiskunde onderwijs in het bijzonder – elkaar in de haren zitten: Op blz. 253 citeert de ACLO W de ELM-publikatie over het begrip 'thema':

> 'Het begrip 'thema' omschrijven we voortaan: een maatschappelijk verschijnsel of probleem ... Wanneer onderwijsleerprocessen rond dergelijke thema's geconcentreerd zijn, spreken we van 'thematisch onderwijs...''

Dit is wat ik noem een 'citaat met puntjes', en in dit geval is het de moeite waard om het volledige stuk tekst te bekijken.
Op blz. VA 28 van 'Middenschool in Beeld' vinden we:

> 'Het begrip 'thema' omschrijven we voortaan als: een maatschappelijk verschijnsel of probleem, dat door de school (leerkrachten en – waar mogelijk – leerlingen) wordt gekozen en gedefinieerd op basis van de eigen schooldoelstellingen, opdat de leerlingen zich daaraan kunnen orienteren aansluitend bij hun eigen ervaringen en daardoor meer zicht en mogelijk greep krijgen op een stukje van de hen omringende wereld en hun eigen plaats daarin.
> Een thema is dus per definitie niet vakgebonden, maar kan wel binnen diverse vakken (al of niet combinatie) worden uitgewerkt. Uitgangspunt voor de selectie van thema's is niet (de wetenschapsstructuur van) een vak, maar de door de school (de docenten en de leerlingen) geïnterpreteerde maatschappelijke relevantie ervan voor de leerling (8) nu en later.
> Wanneer onderwijsleerprocessen rond dergelijke thema's gecentreerd plaats-

vinden spreken we van thematisch onderwijs. In alle overige gevallen is er sprake van niet-thematisch onderwijs.'

Twee dingen vallen op:
- het citaat zoals dat door de ACLO W wordt weergegeven spreekt van onderwijsleerprocessen 'geconcentreerd rond' in plaats van 'gecentreerd rond' (zoals in mijn exemplaar van 'Middenschool in Beeld' staat) thema's;
- het weggelaten middenstuk brengt een belangrijke nuance aan als het gaat om de 'vrijheid van de leerling' en het 'dictaat van de leerplanontwikkelaar'.

Twee incidenten in de sfeer van onzorgvuldig citeren die op zich misschien niet zo ernstig te nemen zijn, ware het niet dat ze de basis vormen van de belangrijkste beschuldigingen door de ACLO W: het wiskundegedeelte van het ELM zou neerkomen op een 'reductie van de leefwereld', een 'verpaupering', een 'roof van de vrijheid van de leerling'.

Inhoudelijk gezien worden in het ELM-fragment twee keuzes aangegeven:
1 het is *niet* de vakwetenschap (of de structuur ervan) die bepalend is voor de selectie van thema's
2 de selectie van thema's wordt gedaan door docenten en leerlingen, aan de hand van wat zij als 'maatschappelijk relevant' interpreteren (aansluitend bij de eigen ervaringen van de leerlingen).

Het is duidelijk dat (2) een *politieke* keuze is, die ook *anders* zou kunnen uitvallen. Je zou bijv. ook kunnen kiezen dat 'de Staat' in plaats van 'de school' bepaalt wat er geselecteerd wordt (is het Rijksleerplan de uitkomst van zo'n keuze?). Je zou er voor kunnen kiezen om juist 'niet-maatschappelijk relevant' bezig te zijn (bijv. vanuit de gedachte leerlingen, zolang het nog kan, af te schermen van de boze werkelijkheid).
Allerlei tussenvormen zijn denkbaar.
Keuze (1) is van een andere orde: zonder deze is het niet mogelijk een keuze als (2) (welke dan ook) te maken. (1) is nog geen politieke keuze.
Het maken van een keuze als (2) (welke dan ook) komt neer op een beperking, een reductie. In termen van de ACLO W: '*verpaupering*'. Vanwege de emotionele lading zou ik liever een ander woord gebruiken, maar ik volg de woordkeus van de ACLO W. In deze redeneertrant is de enige manier om aan 'verpaupering' te ontkomen: het achterwege laten van een keuze (welke dan ook!) als (2). Relevant is dus de vraag: Kan dat? Kun je je onderwijs voorstellen waarbij geen keuzes (= reductie = verpaupering) gemaakt worden? Een dergelijke vraagstelling lijkt veel op de vraag of sport en politiek iets met elkaar te maken hebben.

Sport en politiek

De emoties kunnen hoog oplopen bij discussies over het verband tussen sport en politiek. De een zegt dat sport en politiek niets met elkaar te maken (mogen) hebben; de ander zegt dat je – door te gaan voetballen (of tennissen, of...) in X (Argentinië, Moskou, Zuid-Afrika,...) een politieke daad stelt, of je politiek laat gebruiken (of je dat nu wilt of niet). In zo'n discussie lijkt de ACLO W verstrikt te zijn geraakt in paragraaf 4. ('Wiskunde-onderwijs bedreigd') van haar rapport.

ACLO W en 'Middenschool in Beeld' lijken het eens te zijn over wat de 'sport' is: (leren) mathematiseren. Dat leren mathematiseren dient in context te gebeuren (per definitie). Het verschil in opvatting komt op het volgende neer: 'Middenschool in Beeld' zegt dat de keuze van de context '*niet indifferent*' is (m.a.w. je dient een keuze als (2) te maken); ACLO W zegt: dat is 'reductie van de leefwereld', vrijheidsberoving van de leerling etc., dus verpaupering (nu wel met emotionele lading), een bedreiging van het wiskunde-onderwijs. ACLO W voert leerstofpakketten (van het IOWO) op waarbij die verpauperende keuzes niet gemaakt zouden zijn.
Nu vind ik IOWO-spullen voorbeelden van goed wiskunde-onderwijs. Maar ik maak me niet al te veel illusies: 'school' is per definitie een beperking van de vrijheid van de leerling, nog versterkt door de aanwezigheid van leraren, die zo nodig iets willen onderwijzen; en helemaal een beknotting van vrijheid is het dat die leraren doorgaans gebruik willen maken van schriftelijk lesmateriaal: een boek of... IOWO-pakketten.
Kortom: School is zoals voetballen in Argentinië (of in Moskou).

Ook het volgende geeft te denken op dit punt: ik weet van leraren (en leerlingen!) die niet willen werken met 'Vlieg er eens in' omdat er militaire vliegtuigen in voorkomen; zo zijn er leraren die niet willen werken met 'Exponenten en logaritmen', vanwege de pagina over de abortus-statistieken. Andere leraren zitten zwaar in hun maag met een pakket als 'Verpakkingen' omdat daar de suggestie wordt gedaan dat alles mogelijk is bij het sorteren van de verpakkingen, terwijl in de praktijk uiteraard alleen het sorteercriterium 'vorm' het mogelijk maakt om verder te gaan met het pakket: zo bevinden die leraren zich opeens in de op dat moment niet-gewenste rol van sturende verantwoordelijke voor de gang van zaken.

En de leefwereld van de leerling?
Ach: uiteindelijk gaat die samenvallen met die van de school, met die van de boeken, met die van de leerplanontwikkelaar ..., en op het allerlaatst: met die van de maatschappij.

Besluit

Ik heb in het begin van dit artikel een grapje gemaakt over het zogenaamde 'uitlekken' van het rapport van de ACLO W, maar het zal wel zo zijn dat het stuk aangeboden en geplaatst is om de vermeende inhoudelijke waarde, de 'argumenten nog een keer op een rijtje' en zo. Tot mijn verdriet constateer ik dat wat argumentatie voor goed onderwijs had kunnen zijn, is blijven steken in 'politiek'. Het was mij veel liever geweest als dit rapport, dit advies, intern gebleven was, en prof. Freudenthal een artikel gemaakt had dat echt voor de lezers van Euclides geschreven is, dat echt ingaat op de keuzes van contexten en de problemen daarbij, de vrijheid van de leerling (en de leraar!) als het gaat om mathematiseren, en het leren daarvan, aan de hand van schriftelijk lesmateriaal, bijv. in de vorm van IOWO-pakketten.

Voor het eind van dit artikel had ik ook een grapje gepland: over het vlammend zwaard dat nu ten Oosten van Utrecht is neergezet voor de medewerker pgOLM wiskunde.
Maar ik ben niet meer zo in de stemming: ik leid'leraren op voor het tweede en derdegraads-gebied; ik zie dat ze daar wiskunde moeten onderwijzen die ze niet willen onderwijzen, aan leerlingen die die wiskunde niet willen leren. Ik zie ook dat dat niet komt doordat die wiskunde zo maatschappelijk relevant is: die wiskunde is voor die leerlingen op die tijd en plaats helemaal niet relevant, in geen enkel opzicht.

En verpaupering?
Die is volop aanwezig: het onbenullige examenprogramma (gebaseerd op een slap aftreksel van het programma van 'hogere' schooltypes), de manier om dat voor te bereiden, de examentraining, en de wijze waarop dat tot credo van goed onderwijs verheven wordt (ook gezien dat Sigma adverteert met vraagstukkenbundels om 'te oefenen voor HEWET'?)
Misschien is mijn wereldbeeld wel te eenvoudig: maar ik denk dat IOWO, OW & OC, en evengoed de sektie wiskunde van de SLO, en ook de wiskundemedewerker van de pgOLM, en bijv. het HEWET-team hun best doen (en gedaan hebben) om goed wiskundeonderwijs te maken, tesamen met vele, vele anderen, leraren uit het veld, lerarenopleiders, etc... In dat beeld past wel het leveren van constructieve kritiek op produkten van anderen die ook proberen goed onderwijs te maken; in dat beeld past niet het verketteren van elkaar zoals in het rapport van de ACLO Wiskunde gebeurt.
Als dat beeld fout is, dan hoor ik het wel, denk ik.

Over de auteur:

Cor Nagtegaal is docent wiskunde aan d'Witte Leli (Nieuwe Leraren Opleiding).

Grafieken gebruiken!

ANNE VAN STREUN

Inleiding

In zijn artikel over grafieken (Euclides 58, no. 5) duidt A. J. Th. Maassen het gebruik van grafieken als *heuristisch hulpmiddel* aan. Daarbij is hij in goed gezelschap van G. Polya en andere wiskundigen, die hebben geschreven over het (leren) oplossen van wiskundige problemen. Ook in de koffiekamer van een Mathematisch Instituut zie je menig dispuut over heel abstracte begrippen met plaatjes toegelicht. Want dat helpt (soms) om een idee te krijgen waar het over gaat! Alleen ... je moet wel eerst een grafiekje, een schetsje, kunnen maken en interpreteren. In dit artikel wil ik iets doorgeven van mijn ervaringen op dit punt opgedaan in mijn lessen in 4 vwo, waar in het kader van het project 'Heuristisch wiskunde-onderwijs' veel aandacht wordt besteed aan het gebruiken van grafieken als heuristisch hulpmiddel. De psychologische functie van een plaatje komt tot besluit nog even expliciet aan de orde. Maar eerst een voorbeeld uit mijn werkomgeving aan de universiteit.

Op een idee komen

Twee hoogleraren in de wiskunde reageerden onafhankelijk van elkaar volkomen analoog op een onbegrepen citaat van de Russische onderzoeker Krutetskii. Een citaat dat zij in één van mijn rapporten vonden.
Het citaat luidde:

> Ontbind $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.
> 'Zwakke leerlingen zien hier niet de derde macht van een tweeterm in, omdat ze naar elke term afzonderlijk kijken. Als sommigen er wel in slagen, komt dat, omdat ze alleen naar de eerste en de laatste term kijken. Wat eenvoudig wordt ontdekt, als ze ook zo de uitdrukking $8y^3 + 8y^2 + 8y + 1$ ontbinden.'

U begrijpt het al, in het Russische wiskunde-onderwijs komt de ontbinding van de vorm $(a + b)^3$ nog voor. Een specifieke methode voor een type-opgave. Beide hoogleraren hebben dat kunstje op de h.b.s. ook geleerd en sindsdien vergeten.
'Zeg Anne, dat voorbeeld begrijp ik niet. Leg mij dat eens uit.'
Als geschoold didacticus zeg ik natuurlijk onmiddellijk: 'Hoe ontbind jij zo'n vorm dan?'

'Nu. Even proberen. Als x groot is, wordt die vorm ook groot. En neem je x b.v. -100 dan is die vorm ook sterk negatief. Bij $x = 0$ is de waarde 1. En bij $x = -1$ wordt de functie -8. De grafiek loopt zó, denk ik. In ieder geval is er een nulpunt tussen 0 en -1. Met al die machten van drie er in, kon het wel eens $x = \frac{-1}{3}$ zijn. Even controleren. Ja, dus $(3x + 1)(\quad)$. Dat wordt $(3x + 1)(9x^2 + 6x + 1)$. Nu verder.' Eén van de twee wiskundigen herkende nu $(3x + 1)^2$ in de tweede factor, de andere ging nog even op de zelfde manier door.
Beide hoogleraren hebben op de h.b.s. dergelijke vormen leren ontbinden, beide zijn die specifieke zaken al lang vergeten. Net zoals wij, wiskundedocenten, het overgrote deel van wat wij in een wiskunde-studie hebben geleerd, al lang zijn vergeten. Net zoals onze leerlingen al die specifieke kennis zullen kwijtraken. Hebben ze intussen wel iets anders geleerd? Aktiviteiten, die hen verder kunnen helpen bij het aanpakken van een probleem? Herkent u ze in bovenstaand voorbeeld? '*Even proberen*', '*Een getallenvoorbeeldje nemen*', '*Een schetsje maken*', '*Even controleren*'.
In onze interviews van eerstejaars studenten wiskunde komt herhaaldelijk de geringe status van dergelijke aktiviteiten naar voren. 'Je moet het zien.' 'Het moet algemeen. Met een voorbeeldje begin je niets.' 'Tekenen, dat doe ik nooit.' 'Met grafieken kun je toch niets bewijzen'. Opvattingen, die een blokkade vormen bij het aanpakken van problemen, waarvan zij in hun nieuwe situatie niet meteen de oplossing zien. Waardoor deze bollebozen van het vwo bij hun universitaire studie wiskunde voor de zelfde blokkades komen te staan, als b.v. leerlingen van 3-havo voor wie de golven van de formele wiskunde te hoog gaan.

De sturende en controlerende functie

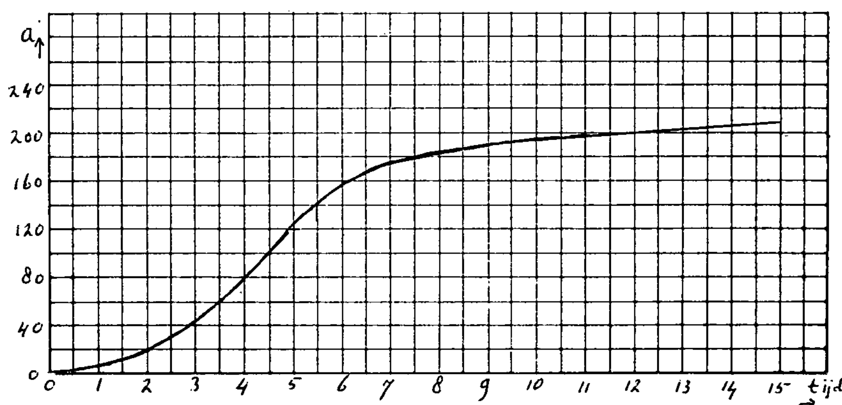
Vier leerlingen uit 4 atheneum zijn onder mijn begeleiding na schooltijd bezig met de volgende opgave uit de herhalingsparagraaf. De opgave luidt:
a Teken de grafiek van de functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R} : x \to 2\sqrt{x}$.
b Los de beide ongelijkheden $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 1$ en $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 3$ op, met $x \in \mathbb{R}$.
Het eerste onderdeel is voor hen op dit moment standaard. Variaties op het tweede onderdeel zijn al voorgekomen, alleen niet in deze vorm. Syrike begint onmiddellijk na onderdeel a met het kwadrateren van de ongelijkheid $2\sqrt{x} > \frac{1}{2}x + 1$. Dat geeft $4x > \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.
Mijn aarzeling leidt tot de vraag: 'Is dat niet wat riskant, wat je daar gedaan hebt? Kan dat zo maar?'
Syrike: 'Ja, ik dacht van wel.'
Erik Jan: 'Dat is ons wel zo verteld.'
De anderen zijn het daar mee eens en met zijn vieren passen ze nu op de ongelijkheid $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 < 0$ de a,b,c-formule toe en noteren tenslotte $x_{1,2} = 6 \pm 4\sqrt{2}$.
Erik Jan: 'Wat moet je nu verder doen?'
Er ontstaat een onderlinge discussie over wat die oplossing nu eigenlijk voorstelt. De voortgang stagneert. Een impasse.
Ik stel enkele vragen: 'Wat zijn we nu eigenlijk aan het doen?' . . .

'Je hebt in het eerste onderdeel al de grafiek van $x \rightarrow 2\sqrt{x}$ getekend. Kun je nu ook de grafieken van $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 1$ en $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 3$ schetsen?'... 'Kun je in de figuur aangeven, wat er nu met die ongelijkheden wordt gevraagd?' ... 'Wat hebben jullie nu eigenlijk berekend?'
De schets van de probleemsituatie en de vertaling van de ongelijkheid naar de figuur helpt bij de vorming van een globale mentale voorstelling van wat er aan de hand is. In veel gevallen heeft zo'n schets een sturende functie in het verdere oplossingsgebeuren, het helpt vaak op weg naar een goede aanpak. Ook is het een uitstekend hulpmiddel bij het snel even controleren of de berekening soms dwaze uitkomsten heeft opgeleverd.

Het functievoorschrift en de grafiek

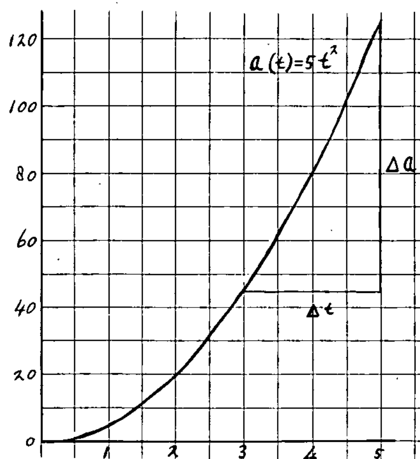
Vóórwaarde voor het kunnen gebruiken van grafieken als heuristisch hulpmiddel is dat leerlingen grafieken kunnen interpreteren, analytische representaties (een functievoorschrift, een vergelijking, een ongelijkheid) kunnen vertalen naar een grafische representatie en omgekeerd. Hebben ze dat van ons geleerd in de onderbouw? Mijn ervaringen van '82-'83 in 4 vwo heb ik geprobeerd te vergelijken met die van de periode '64-'74, waarin ik nog als wiskundeleraar werkzaam was. Allereerst een typerende ervaring in een atheneum-A klas.

De valafstand van een parachutist op verschillende tijdstippen is gegeven in een tabel. De grafiek wordt getekend. Verschillende vragen over die valbeweging worden doorgesproken. Ook de benadering van de val gedurende de eerste 5 seconden door het functievoorschrift $a(t) = 5t^2$ komt aan de orde.



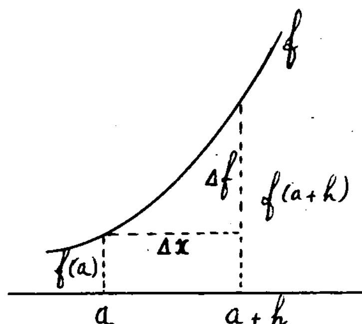
Figuur 1

Nu gaan we proberen om van de gemiddelde snelheden over steeds kleinere intervallen te komen naar de snelheid op het tijdstip $t = 3$.
Eerst voor het interval [3, 5]. Dan voor het interval [3, 4]. Vervolgens voor het interval [3, $3\frac{1}{2}$]. Het stokt. Wat is $a(3\frac{1}{2})$? Dat staat niet meer in de tabel, waarin de tijd in gehele seconden en de valafstanden op die tijdstippen waren gegeven.



Figuur 2

Docent: 'Nee, dat klopt. Je weet, welk functievoorschrift bij de grafiek behoort?'
Ina: 'Ja, $a(t) = 5t^2$.'
Docent: 'Wat is dan $a(3\frac{1}{2})$?'
Leerlingen: 'Wat heeft dat nu met de grafiek te maken?'
Nog vele lessen lang zijn er leerlingen, die de functiewaarde en de y-coördinaat van het punt op de grafiek niet weten te koppelen. Hoe kan dat? De didaktiek van het praatje bij het plaatje (figuur 3) komt zo ook niet goed tot zijn recht.

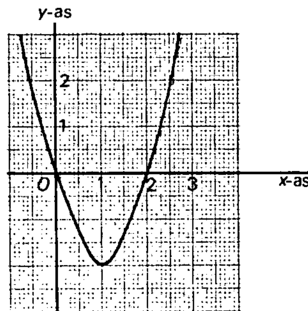


Figuur 3

Thuis over dit verschijnsel nadenkend, schiet mij een kortsluiting in een les van een hospitant weer te binnen. Even opzoeken, ja 3 atheneum.

De hospitant bespreekt de volgende opgave, die thuis de mist is ingegaan.

11 In figuur 2.22 is de grafiek getekend van de functie $g: x \to ax^2 - 4x$ met $D_g = \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$.
Hoe groot is a?



Figuur 4

Wil je met behulp van een grafiek een probleem oplossen, dan komt die relatie tussen het functievoorschrift en de punten *van de grafiek vaak aan de orde. Is de lage score op de volgende toetsvraag ook een symptoom van de onduidelijkheid in die relatie voor veel leerlingen?*
Het is een toetsvraag uit een C.I.T.O.-toets bij het lange-termijn-doel: 'De leerling kan de gegevens uit een diagram, grafiek of figuur gebruiken bij de oplossing van een probleem.'

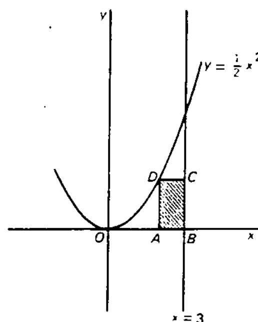
Van de gearceerde rechthoek is $A = (a, 0)$, $B = (3, 0)$, C een punt van de lijn $x = 3$ en D een punt van de parabool $y = \frac{1}{2}x^2$.
De oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is

A $3 \cdot \frac{1}{2}a^2$

B $\frac{1}{2}a^2(3 - a)$

C $\frac{1}{2}a^2(a - 3)$

D $a(3 - a)$



Figuur 5

Een vrucht van onze notatiecultus?

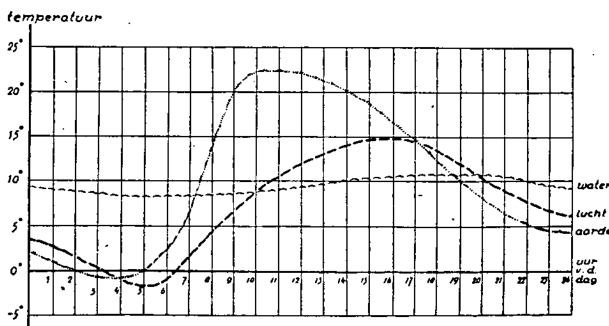
In de oude h.b.s. en het klassieke gymnasium liet onze wiskundige nauwgezetheid wel eens te wensen over. Wij zeiden de dingen wel wat slordig, wat overigens niet het zelfde is als onbegrijpelijk. Dat er tussen $y = 4x^3 - 7x^2$ en $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ verschil bestaat, och daar liepen we wel eens overheen. Maar geen leerling twijfelde er aan dat $f(3) = 7$ het punt $(3, 7)$ van de grafiek van f opleverde. 'Want y en f is het zelfde.'
Verduistert onze cultus met pijlen en accolades soms toch het verband tussen de grafiek en de functie? Heeft het te maken met de verwarring van onze leerlingen ergens in klas 3, als ze worden geconfronteerd met drie verschillende functienotaties met drie verschillende wiskundige achtergronden? Hebben onze collega's uit

de natuurwetenschappen en de economische wetenschappen soms toch gelijk met hun kritiek op onze omgang met functies en grafieken? Twee citaten uit Euclides 57, no. 8 van collega H. Biezeveld. 'Als ik naga hoe mijn leerlingen hun wiskundige kennis in de natuurkundelessen (niet weten te) gebruiken, dan kom ik eerder tot de conclusie dat hun inzicht wordt verduisterd door het hun aangeleerde jargon.' 'Iemand met enige kennis van zaken constateert dat vrijwel dezelfde problemen als voor 1968 worden aangeboden aan de leerlingen. Ergerlijk is echter dat die oude problemen worden verpakt in een steriele nomenclatuur die voor leerlingen een extra barrière vormt.'

Van situatie naar grafiek en omgekeerd

In de wiskundeles is het tekenen van de grafiek meestal het einddoel, dat via de weg van het berekenen van (bijzondere) punten wordt bereikt. In de krant, op de T.V. en in schoolboeken van allerlei vakken vind je grafieken om de tekst te verduidelijken of om veel tekst te vervangen. Hebben uw leerlingen u ook wel eens gevraagd om zo'n grafiek (of diagram ...) uit te leggen? Wie leert onze leerlingen eigenlijk om grafieken en diagrammen te interpreteren in termen van de situatie waar ze betrekking op hebben? Hoort dat niet thuis in de wiskundeles? Onlangs kreeg ik het algebraboek voor klas 1 van de h.b.s. van de auteurs Bos en Lepoeter (weer) in handen. Grafieken van realistische situaties, na 1968 grotendeels uit de schoolboeken verdwenen. Gelukkig komen ze weer terug in een enkele schoolboekenserie, in I.O.W.O.-pakketjes, in HEWETmateriaal, in S.L.O.-publikaties. Waarom gelukkig? Eerst een voorbeeld uit de klassieke 'Bos en Lepoeter'.

8 In onderstaande figuur 10 zie je hoe op een zonnige voorjaarsdag de temperatuur van het aardoppervlak, de temperatuur van de lucht en de temperatuur van het water in de loop van een etmaal veranderen.
Beantwoord nu aan de hand van deze figuur de volgende vragen:
a Bij welke van de drie (aardoppervlak, lucht en water) is de temperatuurschommeling in de loop van het etmaal het grootst en bij welke het kleinst?



b Omstreeks hoe laat bereikt het aardoppervlak zijn hoogste temperatuur en omstreeks hoe laat zijn laagste temperatuur? Zelfde vragen voor de temperatuur van de lucht en van het water.

c In welke volgorde bereiken dus het aardoppervlak, de lucht en het water hun hoogste temperatuur?
d Gedurende welke tijd is het aardoppervlak warmer dan de lucht?
e Gedurende welke tijd is de lucht warmer dan het water?
f Gedurende welke tijden ligt de temperatuur van de lucht tussen de temperaturen van het aardoppervlak en van het water in?
g Gedurende welke tijd zijn de temperaturen van het aardoppervlak, van de lucht en van het water *allemaal* aan het stijgen?

Tot besluit

Waarom is het een goede zaak als in onze wiskundelessen veel meer met grafieken wordt gedaan, dan nu gebruikelijk is? Niet alleen de weg van functievoorschrift naar grafiek, via een tabel en een berekening, maar ook de weg terug. Ook het schetsen van een grafiek bij een in woorden weergegeven situatie, ook het interpreteren van grafieken van realistische situaties, ook het vertalen van grafieken naar analytische representaties ...
De wiskundige kennis, die onze leerlingen in het voortgezet onderwijs opdoen, kan geen doel op zich zijn. Die kennis moet gebruikt worden buiten de wiskundeles. Daarbij zijn grafieken machtige hulpmiddelen, die in zeer gecondenseerde vorm een schat aan informatie kunnen bevatten.
Niet alleen voor het functioneren van de wiskunde buiten de wiskundeles zijn grafieken van belang. Grafieken kunnen voor leerlingen een betekenis geven aan formele uitdrukkingen, functievoorschriften, definities, ongelijkheden, ... Even een plaatje maken kan veel leerlingen helpen bij de aanpak van een probleem, mits zij hebben geleerd formules en situaties te vertalen naar een grafiek en omgekeerd.

Mededeling

Op *zaterdag 8 oktober* wordt de vijfde landelijke dag van de groep 'Vrouwen en Wiskunde' gehouden in 'de Kargadoor', Oude Gracht 36bis in Utrecht.
Aanvang: 10 uur. Het *thema* van de dag is: 'Wiskunde in de markt'. We zullen zowel bestaand als zelfgemaakt materiaal over één of meerdere onderwerpen bekijken, bespreken en uitproberen.
Verdere informatie: Conny Gaykema, tel. 020-82 26 11.

Differentiaalvergelijkingen in het VWO

PAUL DRIJVERS

In dit artikel wil ik de inhoud van mijn doctoraal-scriptie, getiteld 'Differentiaalvergelijkingen in het VWO', bespreken in verband met de hoofdzakelijk in Euclides gevoerde discussie over dit onderwerp. Ruim een jaar geleden zijn in dit blad een aantal artikelen verschenen over de problemen rond de behandeling van differentiaalvergelijkingen in het VWO. Die problemen zijn dat leerlingen veel moeite hebben met dit onderwerp.
Het is mijn indruk dat ook leerlingen die goed zijn in wiskunde, met truukjes de (eindexamen-)opgaven kunnen maken, maar zelf niet het gevoel hebben echt iets van differentiaalvergelijkingen te begrijpen. Het geheel lijkt ze een mysterieuze theorie waarmee men nu eenmaal bepaalde bewerkingen schijnt te moeten uitvoeren.
Een mogelijke verklaring hiervoor is dat differentiaalvergelijkingen gewoon moeilijk zijn, ook vanwege het abstracte begrip 'differentiaal'. Dit lijkt mij slechts een gedeeltelijke verklaring. Wat zeker ook een rol speelt is het feit dat veel schoolboeken dit onderwerp op een warrige, getruukte manier presenteren. Er zijn regelmatig passages te lezen die een wiskundige een vermoeden geven van de bedoeling van de auteur(s), maar die voor leerlingen echt onbegrijpelijk zijn. Ik zal hiervan geen voorbeelden geven, maar ik verwijs naar het artikel van Van Rooij (1) waarin dit uitgebreid aan de orde komt. Verder is het ontbreken van toepassingen in de schoolboeken opvallend.
Van Rooij suggereert in zijn artikel om differentialen maar helemaal weg te laten. Ze zijn immers nergens in het VWO-programma onmisbaar. Ook Nienhuys (2) vindt differentialen niet geschikt voor behandeling in het VWO. Hij bespreekt een aantal toepassingen van differentiaalvergelijkingen. Er zal aan de afleiding van een differentiaalvergelijking uit een concrete situatie veel aandacht moeten worden besteed. Mevrouw Cheng (3) werkt het idee om differentialen weg te laten verder uit. Zij haalt de verborgen parameter tevoorschijn. Tenslotte wijst Moet (4) in Euclides op het belang voor de praktijk van functies als oplossing van een differentiaalvergelijking, en van existentie en eenduidigheid. In de Nieuwe Wiskrant pleit Freudenthal (5) voor het gebruik van differentialen en hun quotiënt.
Mijn scriptie is min of meer in het verlengde van de eerste vier artikelen geschreven. Het overgrote deel bestaat uit een leerlingentekst over differentiaalvergelijkingen voor leerlingen van 5 of 6 VWO, en kan gebruikt worden als voorbereiding op het eindexamen. Essentieel anders (ik denk: beter) dan de

gangbare schoolboeken is deze leerlingentekst op de volgende punten die ik heb willen verwezenlijken:

1 De tekst is wiskundig correct en precies. Er wordt zorgvuldig met uitdrukkingen als 'voor alle' en 'er is een' omgesprongen en er wordt niet over 'het' singuliere punt of 'de' oplossing gesproken zolang niet zeker is dat dat terecht gebeurt. Er wordt wat aandacht aan existentie en eenduidigheid besteed. De definities zijn preciezer dan vaak het geval is. Een lijnelement b.v. is een drierijtje getallen, genoteerd als $((a, b), c)$, waarbij a, b en c aan een door de differentiaalvergelijking bepaalde relatie voldoen. Deze strengere manier van wiskundig formuleren maakt de tekst misschien wat moeilijker te lezen voor leerlingen. Anderzijds geeft het meer mogelijkheden voor echt begrip dan halve waarheden.

2 Concrete problemen, waarbij differentiaalvergelijkingen toe te passen zijn, worden als instapproblemen gebruikt. Deze toepassingen komen uit de natuurkunde of uit de biologie, of zijn meetkundig van aard. Voorbeelden zijn de haringstand in de Noordzee, de lichaamslengte van een kikker en de vervuiling van een meer. Aan deze toepassingen ontlenen differentiaalvergelijkingen hun nut, en leerlingen zullen het leuk vinden om te zien hoe de wiskunde die ze leren gebruikt kan woren. De afleiding van de differentiaalvergelijking uit de praktijk gebeurt met zorg.

3 Differentialen worden in de tekst niet genoemd. Het advies van Freudenthal is dus niet opgevolgd omdat het mij moeilijk en zinloos lijkt om leerlingen uit te leggen wat 'een oneindig kleine variatie dx' is. De notaties 'dx' en 'dy' komen alleen voor als afkorting. De uitdrukking $f(x, y)\mathrm{d}x = g(x, y)\mathrm{d}y$ kan door de lezer naar keuze geïnterpreteerd worden als:

   I Voor welke differentieerbare functie y van (een deel van) $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ geldt voor alle x uit het domein van y: $f(x, y(x)) = g(x, y(x)) \cdot y'(x)$?

of: II Voor welke differentieerbare functies x en y, beide van (een deel van) $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, geldt voor alle t uit het domein van x en y:
$f(x(t),y(t)) \cdot x'(t) = g(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$?

   In eerste instantie zoeken we functies van (een deel van) $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ als oplossing.

4 De tekst is tamelijk uitgebreid zodat de leerlingen de stof grotendeels zelfstandig kunnen verwerken.

Tot slot moet ik een voorbehoud maken. De tekst is niet met leerlingen uitgetest. Of leerlingen die mijn tekst gebruiken, differentiaalvergelijkingen inderdaad leuker en begrijpelijker vinden, zal moeten blijken. Ik zou zeer geïnteresseerd zijn in reacties van docenten die deze scriptie in de klas willen gebruiken. In elk geval kunnen leraren die belangstelling hebben, mijn scriptie tegen kostprijs (*f* 6,50 + porto) bij mij bestellen.

Noten

1 Van Rooij, A. C. M., Differentialen op de middelbare school? *Euclides*, jrg. 57, no. 3, blz. 81-92.
2 Nienhuys, J. W., Differentiaalvergelijkingen. *Euclides*, jrg. 57, no. 4, blz. 139-152.
3 Cheng, S. H., Parametervoorstellingen van krommen en differentialen. *Euclides*, jrg. 57, no. 4, blz. 129-138.
4 Moet, H. K. J., Wie is er bang voor differentiaalvergelijkingen? *Euclides*, jrg. 57, no. 4, blz. 122-128.
5 Freudenthal, H., Differentialen. *Nieuwe Wiskrant*, jrg. 1, no. 4, blz. 15-18, en jrg. 2, no. 1, blz. 16-18.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

Opgaven

491. De getallen van 7 cijfers die gevormd zijn met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, worden in de natuurlijke volgorde geplaatst: $t_1 = 1234567$, $t_2 = 1234576$ enz. Gevraagd t_{1983}. (E. C. Buissant des Amorie)

492. Een getal van acht cijfers is een kwadraat. Het getal gevormd door de eerste vier cijfers is 1 groter dan het getal gevormd door de laatste vier cijfers. Gevraagd dit getal te vinden. (B. Kootstra)

493. Op tafel liggen 4 kaarten met het cijfer 1, 4 met 2, 4 met 3 en 4 met het cijfer 4. De cijfers zijn zichtbaar. *A* en *B* nemen beurtelings een kaart. *A* begint.
Als het totaal aantal punten op de door beiden gekozen kaarten 21 bedraagt, heeft degeen die de laatste kaart genomen heeft, gewonnen. Overschrijdt het totaal aantal punten 21, dan heeft degeen die de laatste kaart genomen heeft, verloren. Wie wint bij optimale strategie en hoe? (B. Kootstra)

Oplossingen

488. De variabelen zijn variabelen over $\mathbb{Z}^+$.
Voor welke a en b hebben $x^2 + ax + b = 0$ en $x^2 + ax - b = 0$ beide twee wortels in $\mathbb{Z}$?
Dit is gelijkwaardig met $\dfrac{-a + \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$, $\dfrac{-a - \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}$, $\dfrac{-a + \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}$ en $\dfrac{-a - \sqrt{(a^2 + 4b)}}{2}$ zijn geheel, hetgeen op zijn beurt gelijkwaardig is met:

$$\exists c, d : a^2 - 4b = c^2 \wedge a^2 + 4b = d^2$$

Men overtuigt zich er gemakkelijk van dat dan inderdaad de tellers van de vier breuken even worden.
Enige overwegingen betreffende oneven en even leren, dat

$$(\exists c, d : a^2 - 4b = c^2 \wedge a^2 + 4b = d^2) \Leftrightarrow \exists c, d\ 2a^2 = c^2 + d^2$$

Als $2a^2 = c^2 + d^2$, dan zijn c en d beide even of beide oneven.
Dan zijn $\frac{1}{2}(d + c)$ en $\frac{1}{2}(d - c)$ beide geheel. Stel

$$x = \tfrac{1}{2}(d + c) \text{ en } y = \tfrac{1}{2}(d - c)$$

Dan is

$$\exists c, d\ 2a^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow \exists x, y\ a^2 = x^2 + y^2$$

Onderstel dat a, x en y relatief priem zijn. Dan zijn de oplossingen van $a^2 = x^2 + y^2$
$a = \frac{1}{2}(r^2 + s^2)$, $x = \frac{1}{2}(r^2 - s^2)$, $y = rs$ (r, s relatief priem en oneven). De algemene oplossing van $a^2 = x^2 + y^2$ is dus

$$a = \tfrac{1}{2}k(r^2 + s^2),\ x = \tfrac{1}{2}k(r^2 - s^2),\ y = krs \text{ (}r, s \text{ relatief priem en oneven).}$$

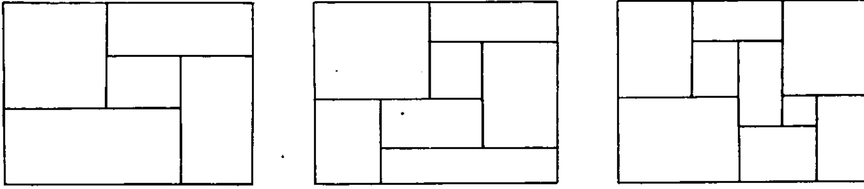
Hieruit volgt

$$b = \frac{(x + y)^2 - a^2}{4} = \frac{k^2rs(r^2 - s^2)}{4}$$

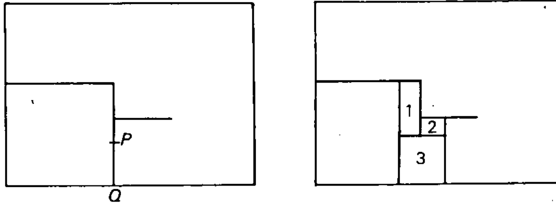
$r = 3$, $s = 1$, $k = 1$ levert $a = 5$, $b = 6$.

489. Verdeel een rechthoek in n rechthoeken. Geen deelverzameling van p van deze n rechthoeken met $1 < p < n$ mag weer een rechthoek vormen. Voor welke n is dit mogelijk?
Triviaal zijn de gevallen $n = 1$ en $n = 2$. In de overige gevallen moeten de vier hoekpunten tot vier verschillende rechthoeken behoren. Men ziet daardoor gemakkelijk dat $n = 3$, $n = 4$ en $n = 6$ geen oplossing geven.

In onderstaande figuren staan oplossingen voor $n = 5$, $n = 7$ en $n = 9$.

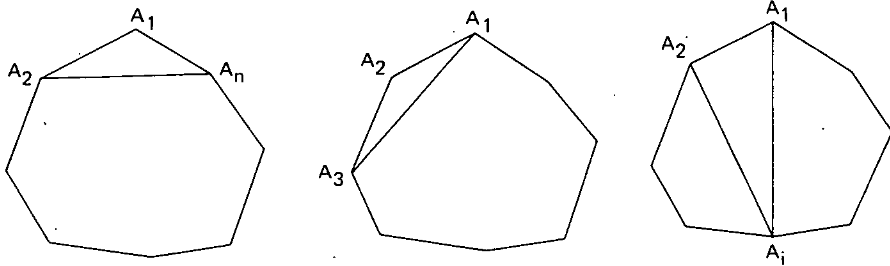


In onderstaande twee figuren ziet men hoe uit een verdeling steeds een nieuwe verdeling afgeleid kan worden waarin n met 3 toegenomen is. Het lijnstuk PQ is daarbij verdwenen.



Gevolg: voor alle n die groter zijn dan 6, is de verdeling mogelijk.

490. Op hoeveel manieren kan een convexe n-hoek in driehoeken verdeeld worden door elkaar niet snijdende diagonalen?
Noem de veelhoek $A_1A_2\ldots A_n$ en het aantal mogelijke verdelingen E_n.



We onderscheiden drie mogelijkheden.

a Geen enkele diagonaal vertrekt uit A_1. De n-hoek wordt dan door de diagonaal A_2A_n verdeeld in een driehoek en een $n-1$-hoek. Op deze wijze vindt men E_{n-1} verdelingen van de n-hoek.

b Uit A_1 vertrekt de diagonaal A_1A_3. Ook nu wordt de n-hoek verdeeld in een driehoek en een $n-1$-hoek. Dit geeft weer E_{n-1} verdelingen.

c Uit A_1 vertrekken niet de diagonalen $A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{i-1}$ en wel de diagonaal A_1A_i. Dan zal de diagonaal A_2A_i ook getrokken moeten worden. De n-hoek wordt nu verdeeld in een $i-1$-hoek, een driehoek en een $n-i+2$-hoek. Het aantal verdelingen hiervan is $E_{i-1}E_{n-i+2}$.

Zodat

$$E_n = 2E_{n-1} + \sum_{i=4}^{n-1} E_{i-1}E_{n-i+2}$$

Het probleem is afkomstig van Euler. Hij gaf als uitkomst

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}$$

Hoe men dit uit de recursieformule kan afleiden, vindt men in het boek waaruit de opgave is overgenomen op blz. 21-27.

Boekbesprekingen

R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization, Vol. I. Unconstrained Optimization*, John Wiley & Sons, 1980, 120 blz. £ 8.80.

De schrijver van dit betrekkelijk dunne boek is een van degenen die gedurende de twee laatste decennia het meest hebben bijgedragen tot het vakgebied van de numerieke methoden voor de oplossing van niet-lineaire optimaliseringsproblemen. Zijn bijdragen op dit gebied kenmerken zich vooral daardoor dat zij het resultaat zijn van een goed inzicht in de essentiële theorie die aan de optimaliseringsmethoden ten grondslag ligt, een inzicht dat hij in al zijn artikelen steeds op een duidelijke wijze heeft kunnen verwoorden. Dit boekje vormt in die lijn van bijdragen geen uitzondering.
In zijn voorwoord merkt de schrijver op dat het gebied van de numerieke optimalisering in zijn visie een fascinerend mengsel is van heuristiek en wiskundige strengheid, van theorie en experiment. Het is een onderdeel van de Wiskunde dat toepassing vindt op vele gebieden van de wetenschap en techniek. Het is zijn bedoeling om in de twee delen, waaruit zijn bijdrage zal bestaan (en waarvan het hier te bespreken boek het eerste deel is) vooral die aspecten van de numerieke niet-lineaire optimaliseringsmethoden te behandelen die van belang zijn voor het oplossen van 'real-life'-problemen. Hij stelt daarbij dat practische ervaring met deze methoden van het grootste belang is en zegt om die reden het niet te schuwen om ook resultaten van vergelijkende onderzoeken in zijn boek te vermelden. Anderzijds zegt hij ook vast te geloven dat inzicht in de basistheorie achter de methoden evenzeer van uiterst groot belang is voor een juiste keuze en een efficiënt gebruik van de juiste methoden voor de oplossing van een gegeven optimaliseringsprobleem. In theorie omwille van de theorie ziet hij bijzonder weinig en die zegt hij dan ook in dit boek te hebben weggelaten.
Het resultaat van de bovengenoemde overwegingen is een bijzonder interessant boekje dat in de ogen van deze recensent het meest weg heeft van een uitmuntend overzichtsartikel van de huidige stand van zaken op het gebied van (in dit deel I) de numerieke methoden voor niet-lineaire optimaliseringsproblemen zonder nevenvoorwaarden. (Het binnenkort te verschijnen deel II zal zich bezighouden met de methoden voor de problemen met nevenvoorwaarden). De manier van presentatie is zodanig dat iedere niet-ingewijde met enige wiskunde-achtergrond zich zonder moeite de basis-ideeën achter de verschillende methoden kan eigen maken. Tegelijk komt ook iedere ingewijde ruimschoots aan zijn trekken omdat de basis-elementen van de theoretische achtergrond op een glasheldere manier in de goede context zijn samengebracht. Kortom, een uitstekend boekje dat niet anders dan zeer warm kan worden aanbevolen.

J. L. de Jong

Detlef D. Spalt, '*Was ist und was soll die mathematische Biologie?*', Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

> '*Ich, sagte er uns*
> *Bin der Zweifler, ich zweifle, ob*
> *Die Arbeit gelungen ist, die eure Tage verschlungen hat.*'
> (Bertolt Brecht)

Welk werk? Het schrijven van dit boek (161 pagina's) of mijn bespreking ervan. Of al het in de literatuurlijst (97 items) geciteerde werk? Omdat de titel u misschien Dedekind in herinnering bracht, vermeld ik enkele van deze 97 items.
(16) Feyerabend, Paul K : Against Method. Outline of an anarchistic Theory of Knowledge...
(20) Freudenthal, Hans : Mathematik als pädagogische Aufgabe...
(27) Hermes, Hans : Einführung in die Mathematische Logik...
(37) MacLane, Sanders : Kategorien...
(82) Stein, G.S. and all : Chromosomal Proteins and Gene Regulation...

En daartussen natuurlijk Lakatos en Thom, Rashevsky en Rosen, Habermas en Popper en nog zoveel anderen.

> *'Trotzdem handelt es sich bei dem folgenden Text um eine mathematisch-biologische Arbeit, in der ich wissenschafts-theoretischen und politischen Ausführungen nur soviel Raum gegeben habe, wie es mir unumgänglich erschien;...'*

Het boek is de uitvoering van een Forschungsprogramm (wat dat is staat in voetnoot 13) geschreven in de Lakatos-methode van de discussie; dit keer tussen Hebreeuwse letters (Alef, Bet, Gimmel, Dalet enz.).
Als mathematisch model voor een organisme kiest de auteur voor een gerichte qraaf, transformaties van deze qraaf geven de ontwikkeling van het organisme weer. Natuurlijk doe ik de schrijver nu onrecht aan. Het woord 'weergeven' is wel wat snel neer geschreven voor de subtiele introductie van de 'semantische Grundsätze', zoals die in de axiomatische behandeling in de eerste hoofdstukken worden neergelegd (of misschien beter: worden opgericht, niet voor niets koos de auteur Brecht als openingsdichter). De vakman in 'general abstract nonsense' ziet nu de categorieën (MacLane) aan de horizon verschijnen en zo binnen de mathematische biologie ook links geadjungeerde factoren verschijnen.
Citaat buiten verband:

> *'Alef: Das hat bis her auch noch keine Biologen interessiert!*
> *Tet: Um so schlimmer für die Biologen!*

Het is, zoals u nu begrijpt, een heel ander stuk mathematische biologie als: 'La théorie mathématique de la lutte pour la vie' of als mathematica en genetica. Om het eerlijk en goed te kunnen bespreken zou ik een jaar met een aantal wetenschappelijke werkers van uiteenlopende vakgebieden (biologen, wetenschapsfilosofen, grondslagen onderzoekers) de discussie tussen Alef en Lamed, He en Sajin moeten heropvoeren, interpreteren, bediscussiëren. Misschien zelfs een Tammudistisch commentaar schrijven aan de hand van dit zo ongewone en belangwekkende boek. Ik volsta met deze regels om de lezer een indruk te geven van de wel totaal onverwachte aanpak van deze inleiding in de grondslagen van de mathematische biologie.

F. van der Blij

A. I. Mees, *Dynamics of Feedback Systems*, Wiley-Interscience, 1981.

Dynamische systemen zijn systemen zonder input en/of output. Dit boek beargumenteert de stelling dat dynamische systemen beter te begrijpen zijn door ze wel als systemen met input en output te beschouwen.
Hiertoe worden eerst zowel de theorie van de dynamische systemen geschetst (genericiteit, periodieke banen, deterministische chaos) als die van de terugkoppelingssystemen (stabiliteit en begrensdheid van oplossingen). De klap op de vuurpijl komt dan in het laatste hoofdstuk waar de hele machinerie wordt losgelaten op de Hopf-bifurcatie.
Arme Hopf! Eerst wordt de naar hem vernoemde bifurcatie (van een limietcykel uit een punt) behandeld door Marsden en McCracken, en nu stort zich een menigte hieroverheen, die zegt het beter te kunnen dan dit fameuze duo. De echte uitdaging is natuurlijk het nog onhandiger te doen.
Op zich is dit een aardig boek, maar de stelling, hoe aardig die ook klinkt, heeft een betere illustratie nodig dan de zoveelste berekening aan de Hopf-bifurcatie. We zullen hopen dat iemand daar na lezing mee aan komt. Misschien wat voor U?

Jan A. Sanders

Mededelingen

Jaarvergadering/studiedag 1983. 'Vak-beweging'

De jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren wordt gehouden op 12 november 1983 in het gebouw van de SOL, Archimedeslaan 16, Utrecht.
Door de Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW & OC) en de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) wordt in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) een programma voorbereid waarbij nieuwe ontwikkelingen in en om het wiskundeonderwijs centraal staan, vandaar het thema 'Vak-beweging'.
In zeven werkgroepen kan men die dag deelnemen aan activiteiten op het gebied van:

1 BOVO: verhoudingen op het breukvlak van basisonderwijs en voortgezet onderwijs.
2 Voortgezet rekenen.
3 Burgerinformatica.
4 Heterogene groepen.
5 Introductie functies.
6 Hewet*, de groei in wiskunde A.
7 Hewet, de ruimte in wiskunde B.

Er komt nog een boekje over deze zeven onderwerpen. Bij aanmelding voor de jaarvergadering/studiedag krijgt men dit boekje thuis gestuurd.
De agenda voor de jaarvergadering, tevens uitnodiging voor de leden, komt in één van de volgende nummers van Euclides.
Men kan zich aanmelden voor de jaarvergadering/studiedag door overschrijving van *f* 14,50 (voor de lunch) naar girorekening 143917 van de NVvW te Amsterdam (voor 1 november aanstaande). Nietleden zijn welkom, zij betalen *f* 25,–.
Houd 12 november 1983 vrij voor de jaarvergadering/studiedag met onderwerpen voor wiskundedocenten van *alle schooltypen*.
Hieronder volgen beschrijvingen van de activiteiten in de zeven werkgroepen. Elke werkgroep biedt – bij voldoende deelname – zowel 's morgens als 's middags hetzelfde programma. Elke deelnemer kan twee uit zeven werkgroepen kiezen.

1 BOVO

Verhoudingen op het breukvlak van het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs.

De aansluitingsproblematiek 'Basisonderwijs-Voortgezet onderwijs' wordt kortheidshalve ook wel met BOVO aangeduid. Om iets aan die problematiek te doen, zijn op diverse plaatsen door de overheid gesubsidieerde BOVO-cursussen gaande, waaraan leerkrachten uit basis- en voortgezet onderwijs gezamenlijk deelnemen, om onder andere het levensgrote aansluitingsprobleem voor rekenen en wiskunde lokaal aan te pakken.
Er gaapt een gat tussen het rekenen van de lagere school en de wiskunde van de brugklas. Waar de leerling op de lagere school eindigt met breuken, decimale breuken, verhoudingen en procenten – als hij daardoor niet afhaakt – begint hij in de brugklas veelal met verzamelingen, letterrekenen, coördinaten en spiegelen.
Op veel scholen in het voortgezet onderwijs wordt het rekenen als afgerond beschouwd, dat wil zeggen door de leerlingen gekend en – op den duur – niet vergeten.
Uitgaande van de ervaringen opgedaan op de BOVO-cursus te Amersfoort zal met de deelnemers een mathematisch-didactisch praktikum worden verwerkt, dat in het teken staat van 'verhoudingen en evenredigheden'.
Er zal onder andere worden stilgestaan bij:

- verhoudingen in het lager onderwijs;
- het toepassen van hulpmiddelen in het leerproces, in het bijzonder de verhoudingstabel;

* HEWET betekent: Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Een en Twee.

- knelpunten in de toepassingsvakken als natuur- en scheikunde;
- het lange termijn leerproces als brug tussen basisonderwijs-rekenen en voortgezet onderwijs-wiskunde en toepassingsgebieden.

Programma
1 Inleiding 'BOVO-algemeen' (15 minuten).
2 Mathematisch-didactisch praktikum in kleine groepen naar aanleiding van werkbladen en activiteiten uit lager- en voortgezet onderwijs (rekenen, wiskunde en toepassingen in de exacte vakken); (45 minuten).
3 Reflectie op het praktikum (30 minuten).

2 Voortgezet rekenen

Inhoudelijk
Rekenen en rekenproblemen hebben de kwalijke reputatie brugklassers maar ook hun wiskundelerar(ess)en voor grote moeilijkheden te plaatsen. In het SLO project 'wiskunde 12-16' werd in het afgelopen schooljaar – naast goede spullen – de onhebbelijke gewoonte ontwikkeld lerar(ess)en niet om deze problemen heen te laten lopen maar hen ertoe te stimuleren deze constructief op te pakken en naar oplossingen te zoeken. Onder bepaalde voorwaarden blijkt dit aardig te lukken. Een belangrijke voorwaarde is de beschikbaarheid van geschikte rekenopgaven die als uitgangspunt voor inhoudelijke gesprekken met brugklassers kunnen dienen. Deze zijn inmiddels ontwikkeld en uitgeprobeerd. Dergelijke interviews kunnen leerkrachten zicht geven op de centrale vraag 'hoe leerlingen hun rekenen begrepen hebben'. Een andere voorwaarde is vanzelfsprekend de bereidheid van de leerkracht dit gesprek met leerlingen daadwerkelijk aan te gaan en zich te bezinnen op de uitkomsten ervan. Deze blijken (is onze ervaring) onthullend te zijn, in die zin, dat veelal blijkt dat kinderen hun rekenen veelal heel anders hebben begrepen, dan door de leerkracht wordt verondersteld. Een andere belangrijke conclusie die telkens weer naar voren komt, is bijv. dat leerlingen hun rekenonderwijs hebben leren overleven door het inventief ontwikkelen en hanteren van eigen informele strategietjes en methoden. Dergelijke uitkomsten zijn voor de leerkracht niet vrijblijvend, en blijken consequenties te hebben voor hun vervolg reken/wiskundeonderwijs, alsmede hun visie daarop.

Organisatorisch
Na een zeer korte introductie willen we bezoekers van de jaardag dergelijke ervaringen in het klein laten opdoen.
Met behulp van een zestal werkbladen kan dat als volgt:
1 In kleine groepjes zelf aan de slag met enkele rekendidactische opgaven.
2 Inschatten en verwoorden van verschillende oplossingsmethoden en leerlingstrategietjes.
3 Deze confronteren met door ons geobserveerde en geprotocolleerde strategieën van brugklassers.
4 Verwoorden van bevindingen.
5 Deze confronteren met de bevindingen van collegae wiskundeleraren die al op wat ruimer schaal ervaringen opdeden met hun leerlingen en deze opgave(n).
6 Bediscussiëren en doordenken van mogelijke consequenties t.a.v. eigen reken/wiskunde-onderwijs.

Voor deelnemers is een exemplaar van het 'Praktijkboek Voortgezet Rekenen' beschikbaar. In dit boekje komt dezelfde thematiek in een ruimer kader aan bod dan in deze workshop mogelijk is.

3 Burgerinformatica

Burgerinformatica is een nieuw leergebied. Over de inhoud van dit leergebied bestaat nog veel onduidelijkheid. De plaats van het leergebied in het totale vormingsaanbod staat nog ter discussie. Moet burgerinformatica een apart vak worden of onderdeel van de bestaande vakken?
Wel is men het er over.eens dat bij burgerinformatica vooral aandacht dient te worden geschonken aan het kennis nemen van toepassingen van de informatie-technologie en de maatschappelijke consequenties.
Het leren van een programmeertaal wordt ondergeschikt gezien aan het leren benutten en evalueren van de opbrengsten van de 'informatiemaatschappij', voorzover dat het onderwijs aan *allen* betreft.

Met name het zelf gebruiken van toepassingen die leerlingvriendelijk zijn en een goed beeld geven van de mogelijkheden en beperkingen van gegevensverwerkende systemen kunnen een ingang zijn voor burgerinformatica-onderwijs.
Burgerinformatica is niet vanzelfsprekend een vak dat door wiskundeleraren gegeven kan/moet worden. Samenwerking van docenten van alle vakken zal voor een goede ontwikkeling van de burgerinformatica op school noodzakelijk zijn. Veel wiskundeleraren zijn betrokken bij de invulling en de vormgeving van burgerinformatica op hun school. Daarom mag dit onderwerp niet ontbreken op de jaarvergadering.
In een kort inleidend verhaal willen we wat nader op de hiervoor genoemde aspecten ingaan.
De voornaamste activiteit zal zijn het kennismaken met zeer uiteenlopende voorbeelden van toepassingen, gekoppeld aan leerlingenactiviteiten. We denken daarbij aan tekstverwerking, informatiesystemen (administratie, reservering, gegevensbank), simultaties en diverse andere, op leerlingen gerichte programmatuur, zoals logo.
Er zullen verschillende merken microcomputers aanwezig zijn. Deelnemers kunnen dan ook zelf aan de slag met leerlingenactiviteiten.
Het is vooral de bedoeling de deelnemers een indruk te geven van de veelsporigheid van mogelijke activiteiten bij burgerinformatica.
Er zullen voldoende mensen aanwezig zijn die samen met de deelnemers kunnen doorpraten over de gang van zaken in de klas.

4 Heterogene groepen

In deze workshop zal het gaan om de volgende vraag:
Werken in (kleine) heterogene groepen, hoe gaat dat nou eigenlijk?
In de workshop zouden dan de volgende onderwerpen aan bod kunnen komen:

* Werken aan een probleem in groepen van vier.
  Zo zullen de deelnemers 'aan den lijve' kunnen ondervinden wat *werken in heterogene groepen* betekent. Er zal gewerkt worden aan een probleem uit een bestaand leerlingenpakket.
  De opdrachten zouden daarbij kunnen zijn:
  - beschrijf de oplossingsstrategieën die in de groep naar voren komen
  - beschrijf mogelijke oplossingen (en oplossingswegen) op leerlingenniveau
  - schrijf op wat je zelf als leraar (klassikaal) zou willen nabespreken.
* Kijken naar videobeelden van kinderen die aan het werk zijn in kleine heterogene groepen. Hoe komen verschillende oplossingen tot hun recht. Klopt de praktijk met wat we er van verwachtten toen we zelf aan het probleem werkten.
* Het organiseren van klassikale momenten is een belangrijke activiteit van de leerkracht tijdens het werken met heterogene groepen. De verschillende soorten klassikale momenten die je kunt onderscheiden, kunnen worden besproken en eventueel toegelicht met videofragmenten in deze workshop.

Naast de benodigde teksten etc. zal in de workshop ook de SLO publikatie 'Naar aanleiding van ... het werken in kleine heterogene groepen' worden uitgedeeld. Deze publikatie bevat een analyse van een jaar leerlingenobservaties in brugklassen waarin gewerkt werd in heterogene groepen.

5 Introduktie functies

Er zijn ruwweg vier mogelijkheden om een verband tussen grootheden te beschrijven, nl.:
- in omgangstaal
- in tabelvorm
- in de vorm van een grafiek
- in een formule

In de wiskunde zijn het vooral de laatste drie die veel aandacht krijgen, waarbij de formule de meeste nadruk heeft.
Niet alleen deze beschrijvingsmiddelen, maar ook de overgang tussen zulke beschrijvingen zijn in het wiskundeonderwijs van groot belang. Het 'vertalen' van een tabel naar een grafiek, of van een formule naar een grafiek zijn veelvuldig geoefende vaardigheden.
De sectie wiskunde van de SLO heeft geruime tijd gewerkt aan een introduktie op functies via globale grafieken. Daarbij beginnen leerlingen met het beschrijven van verbanden in grafieken die ze

voornamelijk globaal bekijken: stijgen, snel en langzaam stijgen, dalen, constant blijven, etc. Het 'vertalen' van 'omgangstaal' naar 'grafiekentaal' en vice versa, krijgt in het begin veel aandacht. Pas in tweede instantie komen er numerieke aspecten bij: getallen langs de assen, punten onderscheiden, etc.
De gegevens die zijn verkregen met behulp van enkele experimentele leerstofpakketjes hebben geleid tot de brochure 'In verband met ...'. Bij de pakketjes horen ook een drietal computerprogramma's die deze introduktie van functies (verbanden) via globale grafieken ondersteunen.
Tijdens de werkgroepbijeenkomst is er gelegenheid kennis te maken met de pakketjes, met de brochure 'In verband met' en met de computerprogramma's.
Organisatorisch
Na een korte introduktie gaan we in twee groepen een prakticum doen: In de eerste groep met leerlingenmateriaal en met 'In verband met ...'. In de tweede groep met de bijbehorende computerprogramma's. Daarna wisselen we de beide groepen zodat iedereen de beide praktica kan meemaken.
Tenslotte willen we een afsluitende discussie houden (ongeveer een half uur).

6 Hewet, de groei in wiskunde A

Inhoud
In de wiskunde A wordt, als onderdeel van de toegepaste analyse, veel aandacht besteed aan allerlei groeiprocessen.
Onderscheiden kunnen worden:
  Periodieke groeiprocessen
  Exponentiële groeiprocessen
  Logistische groeiprocessen
Voor allerlei – niet alleen biologische – verschijnselen wordt getracht een passend wiskundig model te vinden.
Er blijkt een verrassend (?) verband te zijn tussen periodieke- en exponentiële groei en Lesliematrices, hetgeen weer een mogelijkheid geeft om de integratie tussen de verschillende onderdelen van wiskunde A te vergroten.
Bij onderzoek naar groeiverschijnselen kunnen log- en dubbellogpapier goede diensten bewijzen, terwijl ook computergebruik heel nuttig kan zijn.

Programma
- Korte inleiding 'Groei in het wiskunde A-programma'.
- Een practicum 'Groei'.
- De computer en 'Groei'.
- 'Groei' op de eerste eindexamens wiskunde A.
- Discussie.

7 Hewet, de ruimte in wiskunde B.

De aanduiding 'Hewet' roept in eerste instantie associaties op met de nieuwe wiskunde A. Toch mag er niet worden vergeten dat er ook een wiskunde B in aantocht is, waarbij weliswaar zo'n 70% van de stof uit de welbekende analyse uit wiskunde I zal bestaan, maar dat voor 30% geen oude koek is (of voor sommige leraren juist wel). Hoe het ook zij, de 'ruimtemeetkunde' is op zijn minst een vak dat we in het Nederlandse wiskunde-onderwijs al lang ontwend zijn. Trouwens, het Hewet-rapport belooft toch echt een nieuw type meetkunde, getuige de volgende doelstelling:
(...) Het doel dat de werkgroep voor ogen staat is zoiets als het *kunnen onderzoeken en beschrijven van ruimtelijke figuren en het oplossen van problemen daarover; dit met een verscheidenheid aan hulpmiddelen: construeren, redeneren, gebruik van vectoralgebraïsche methoden en methoden uit de analyse, al naar gelang dat bij een bepaald probleem het beste past.*

In het Hewet-rapport worden slechts de contouren van de ruimtemeetkunde geschetst, hier en daar wat ingekleurd. Inmiddels is er wat meer zicht gekomen op dit onderdeel. Dit schooljaar is men op de 12 Hewetscholen gestart met wiskunde B, waarbij gebruik wordt gemaakt van het door OW en OC ontwikkelde pakket 'Lessen in Ruimtemeetkunde'.

In de werkgroep zullen diverse aspecten van dat programma worden belicht:
- hoe anders is de ruimtemeetkunde in vergelijking met de vectormeetkunde (wiskunde 2) of de vroegere stereometrie?
- op welk eindniveau wordt er gemikt?
- wat zijn de ervaringen op de experimenteerscholen?
- hoe aanbevelenswaardig is het gebruik van concreet materiaal?
- wat zijn de consequenties voor de onderbouw?
- ...

Na een korte inleiding zullen de deelnemers aan de werkgroep ruimschoots de gelegenheid krijgen te werken aan fragmenten van een leerlingtekst.
Na afloop van dit 'practicum' zal er tijd zijn voor discussie over bovengenoemde en nieuw gerezen vragen.

NVORWO

Op 3 juni 1982 is opgericht de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde-Onderwijs (NVORWO).
Het doel van de vereniging is bevordering en belangenbehartiging van het reken/wiskunde-onderwijs (4–14 jaar) in al haar facetten. De vereniging heeft thans een kleine tweehonderd leden, voor het merendeel reken/wiskunde-didaktiekdocenten van de PA, methodiekdocenten van de KLOS, pedagogiekdocenten, maar ook schoolbegeleiders, leerplanontwikkelaars en onderzoekers.
Een werkgroep Informatica verricht reeds enige tijd studie. Ook zullen werkgroepen op andere terreinen gestart worden.
Tevens ondersteunt en initieert de vereniging studie- en ontmoetingsdagen op het omschreven gebied.
De vereniging is toegankelijk voor eenieder, die belangstelling heeft voor het reken/wiskunde-onderwijs.
De contributie voor 1983 bedraagt *f* 10,–.
Inlichtingen kunnen verkregen worden bij het secretariaat (p/a OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel.: 030-61 16 11, Mw. B. Dekker) of bij de secretaris van de NVORWO: E. de Moor (020-25 50 71).

Oriënterend Colloquium voor leraren

Onder deze titel wordt er door de afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum jaarlijks een cursus georganiseerd voor Wiskundeleraren VWO/HAVO/HBO en andere belangstellenden. Deze cursussen zijn bedoeld om de deelnemers de gelegenheid te geven hun kennis van de wiskunde uit te breiden dan wel op te frissen. Het onderwerp voor het cursusjaar 1983/84 is

Liegroepen en Lie-algebra's

In de cursus zal eerst het verband tussen deze begrippen uiteengezet worden. Daarna zal er veel aandacht aan Lie-algebra's besteed worden (o.a. aan de hand van de eerste paar hoofdstukken van het boekje van J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, GTM 9, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1972). Tenslotte zal de verworven kennis betreffende Lie-algebra's gebruikt worden voor de theorie van Liegroepen. Waar mogelijk zal ook iets over toepassingen verteld worden.
Voor het volgen van de cursus is niet veel specifieke voorkennis nodig. Er zal getracht worden zoveel mogelijk aan te sluiten bij de kennis van de deelnemers.

Aanvangsdatum: woensdag 21 september 1983.
Tijd: 19.30-21.15 uur.
Frequentie: wekelijks tot half maart, met onderbrekingen gedurende de vakanties.
Plaats: Amsterdam; nadere plaatsaankondiging volgt na aanmelding.
Inlichtingen en opgave: J. de Vries, Mathematisch Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, (020)-5 92 41 70.

PAO leraren cursus Algoritmiek

Georganiseerd door de afdeling Informatica van de Katholieke Universiteit Nijmegen.
Als onderwijstaal wordt ELAN gebruikt, een eenvoudige programmeertaal uit de ALGOL familie, die speciaal is ontworpen om het leren systematisch programmeren gericht te ondersteunen.
Als middel voor Top-Down programmering biedt ELAN de verfijning, als middel voor Bottom-Up programmering de pakketten met interfaces. In de cursus wordt de Top-Down programmering onderwezen onder gebruikmaking van een interpreter voor de deeltaal ELAN0. Deze ELAN0 interpreter is speciaal voor scholen ontwikkeld en is momenteel beschikbaar op APPLE II, PHILIPS P2000, CBM, NEWBRAIN en TRS80 computers. ELAN biedt een alternatief voor BASIC in het onderwijs.

Inhoud: De cursus omvat het systematisch ontwerpen van iteratieve algoritmen, eenvoudige datastructuren en hun realisering in een geschikte programmeertaal. De cursus komt overeen met een 'inleiding in de informatica' op universitair niveau met een omvang van 2 semesteruur.
De volgende onderwerpen komen aan de orde
- het begrip algoritme
- top-down programmering met verfijningen
- notatie van algoritmen
- notatie van objekten
- de elementaire typen: gehele getallen, reële getallen, waarheidswaarden, tekens en teksten
- controlstructuren: keuze, herhaling
- datastructuren: rijen en structuren
- procedures en recursie

Docent: C. H. A. Koster.
Tijden: college: dinsdag 18.00-21.00 uur, praktikum: donderdag 18.00-21.00 uur, gelegenheid tot oefenen: zaterdag.
Periode: midden november 1983 – eind maart 1984, gedurende 10 werkweken.
Cursuskosten: Deze worden betaald door het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen. Cursisten die meer dan *f* 110,– moeten betalen aan reis- en verblijfkosten kunnen deze kosten vergoed krijgen onder aftrek van een eigen bijdrage van *f* 100,–. Daarnaast wordt van de cursisten een eigen bijdrage verlangd van *f* 80,– voor lesmateriaal.
Aantal deelnemers: max. 40.
Aanmelding: Vóór 10 september a.s. schriftelijk, onder bijsluiting van een girobetaalkaart of een Eurocheque à *f*80,– per deelnemer, ten gunste van 'FW 3121 – ELAN projekt' aan Secretariaat Afdeling Informatica I, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Toernooiveld, 6525 ED Nijmegen.
Belangstellenden die zich reeds (voorlopig) hebben aangemeld worden verzocht deze aanmelding te bevestigen. Plaatsen worden in volgorde van binnenkomst van de aanmeldingen vergeven.

Aan alle Elan0 gebruikers

Omdat we binnenkort de 'definitieve' versie 1.0 van de Elan0 interpreter uit gaan brengen organiseren we een enquête met als doel de interpreter zo goed mogelijk op uw wensen te kunnen afstemmen. Indien u nog geen enquêteformulier heeft ontvangen kunt u dit op bovenstaand adres aanvragen. Bij voorbaat dank voor uw medewerking, Pieter Dieckmann.

Kalender

zaterdag 8 oktober: landelijke dag werkgroep Vrouwen en wiskunde, inl.: Topy van Noorden, Pauwstraat 28, 4815 GL Breda, 076-87 27 38.
zaterdag 12 november: jaarvergadering/studiedag NVvW
20-24 maart 1984: Internationale Lehrmittelmesse DIDACTA 84, Basel, inl.: Sekretariat DIDACTA 84, Postfach, CH-4021 Basel, Zwitserland

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

P. Drijvers, Molenstraat 7', 7551 DA Hengelo

F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin

Mw. F. Meester, Waalstraat 118''', 1079 EC Amsterdam

C. Nagtegaal, Emmalaan 14, 3581 HT Utrecht

A. van Streun, Hoogbouw WSN, Nettelbosje 2, 9747 AE Groningen